

Переменные звезды 21, № 2, 161-168, 1979

Variable Stars 21, No 2, 161-168, 1979

Статистическое исследование изменений периодов
переменных звезд типа RR Лиры в шаровых
звездных скоплениях

Т.И. Грызунова

Рассматривается возможность использования методов математической статистики в изучении изменений периодов колебаний блеска переменных звезд типа RR Лиры в шаровых звездных скоплениях. Показано, что если считать изменение периода колебания блеска одной отдельно взятой звезды простейшим потоком однородных событий без последствия, а вероятность изменения периода на всех временных интервалах одинаковой и не зависящей от чередования событий до момента t , то эти изменения можно рассматривать как случайный процесс марковского типа с непрерывным временем.

Statistical Investigation of Period Changes of RR Lyrae
Variables in Globular Clusters
by T.I. Gryzunova

A possibility of application of mathematical statistics methods to the period changes of an individual pulsating RR Lyrae variable star and all the stars of the same type in a globular cluster are examined.

If one assumes that:

- a) the period change probability for an individual star is constant in time,
- b) the observed changes of the period are situated accidentally on the time axis,
- c) the period change does not depend on the fact of the star's previous period changes,

then the observed period changes of RR Lyrae variables in the globular clusters are just an ordinary flow of uniform events without any consequence.

Accounting on these assumptions a mathematical model of the period change number of an individual pulsating star and all the stars of the same type in a globular cluster is constructed. It is shown, that the observed changes of period are described by Markov's process with continuous time. The changes of periods of RR Lyrae variables in the globular clusters NGC 5024, NGC 5272, NGC 5466, NGC 5904, NGC 6171, NGC 7078 are considered. The results of the investigation are given in Tables 1-7. The observed number of period changes is given in the first column of Tables 2-7, the number of stars which suffered corresponding period change number is given in the second column, the third column of the Table illustrates the mathematical expectations of a number of stars which suffered the given period change

number in accordance with the assumption that the change of the period is described by Markov's process with continued time. The last column illustrates the value of the Pearson Criterion χ^2 . The main characteristics of the globular cluster are given in Table 8.

An analogous investigation for the clusters pertaining to Oosterhoff groups I and II (OoI and OoII) and morphological blueness groups of horizontal branches I and II (Mironov and Samus') is given in Tables 9-12.

Finally, the observed period changes of pulsating RR Lyrae variables in globular clusters are represented as a flow of accidental events without characterizing evolutionary changes of stellar structure.

Переменные звезды в шаровых скоплениях представляют собой важный класс объектов. Частота встречаемости переменных, их распределение по типам, периодам пульсации, вероятно, зависят от того, на какой стадии эволюции находится система, которой они принадлежат.

Теоретические расчеты предполагают, что в ходе эволюции звезды на диаграмме Герцшпрунга-Рессела (Г-Р) изменяются такие важнейшие параметры звезды, как ее радиус, средняя плотность, период пульсации. Выводы эволюционной теории можно проверить, сравнивая на диаграмме Г-Р моделированные горизонтальные ветви шаровых скоплений различного возраста с параметрами наблюдаемых ветвей. К числу звезд горизонтальной ветви относятся и наиболее часто встречающиеся в шаровых скоплениях пульсирующие переменные типа RR Лиры.

Одной из наиболее важных характеристик переменных звезд типа RR Лиры является период пульсаций. Многочисленные наблюдения отдельных переменных в шаровых скоплениях дают возможность определять периоды колебания звезд с высокой степенью точности. Наблюдения показывают, что некоторые переменные этого типа могут не сохранять период пульсации постоянным в течение всего времени наблюдения, а претерпевают как увеличение его, так и уменьшение.

В работе рассматриваются изменения периодов переменных звезд типа RR Лиры в шаровых скоплениях NGC 5024, NGC 5272, NGC 5466, NGC 5904, NGC 6171 и NGC 7078. Из 288 исследованных звезд период увеличился у 92 звезд, 115 показали его уменьшение, и у 81 звезды он сохранился постоянным.

В таблице 1 приведено число изменений периодов $-k$ (в первом столбце) и наблюдаемое число звезд, претерпевших данное число изменений для каждого из исследуемых скоплений. $-n_1$ — наблюдаемое. Так, $k=0$ соответствует тому, что за время наблюдения звезда не изменила период, $k=1$ — наблюдалось только одно изменение и т.д. Для некоторых скоплений имеются результаты исследований нескольких авторов, и поэтому в таблице 1 приведены обобщенные данные по всем источникам.

Таблица 1.

скопле- ния k	n_i наблюдаемое в скоплениях					
	NGC 5024	NGC 5272	NGC 5466	NGC 5904	NGC 6171	NGC 7078
0	4	32	5	15	7	18
1	8	47	7	35	9	22
2	9	19	3	7	5	9
3	3	7	1	3	1	1
4	2	3	1	1	0	0
5	2	1	0	0	—	—
6	1	0	—	—	—	—
7	0	—	—	—	—	—
$N_{набл} = \sum n_{i,набл}$	29	109	17	61	22	50

Из анализа работ многих авторов—Кукаркиной, Кукаркина (1961), Макаровой, Акимовой (1965), Сейдла (1965), Куттс, Сойер-Хогг (1969, 1971), Кукаркина, Кукаркиной (1970, 1971), Грызуновой (1972), Горанского (1976)—следует, что у каждой отдельно взятой звезды не наблюдается какой-либо периодичности в изменении периода.

Для переменных типа RR Лир в шаровых скоплениях графики хода уклонений О—С (наблюденный момент максимума блеска минус рассчитанный) на продолжительных интервалах времени значительно лучше представляются совокупностью отрезков прямых, чем плавными кривыми (Кукаркин, 1956), т.е. какой-то интервал времени звезда пульсирует с определенным периодом, затем происходит его изменение, и вновь звезда продолжает пульсацию, но с периодом, несколько отличающимся от прежнего. Пульсацию звезды с определенным периодом можно рассматривать как одно из возможных ее состояний x_i , а изменение периода колебания блеска—как переход звезды из этого состояния x_i в состояние x_{i+1} . Число изменений периода одной отдельно взятой звезды может быть только дискретным, целым, неотрицательным, и с возрастанием времени наблюдения никогда не убывает. Примем также, что вероятность того, что звезда ушла из i -го состояния ($i > 0$) в течение времени t , не зависит от того, сколько времени она пробыла в этом состоянии, и время пребывания звезды в состоянии i распределено на временной оси по показательному закону с параметром λ . Другими словами, любые сведения о том, сколько времени период оставался постоянным, не влияют на закон распределения последующих изменений периода, т.е. не зависят от предьстории. В силу сказанного, изменение периода можно рассматривать как случайный процесс марковского типа с непрерывным временем, а $x_i(t)$ представляет собой однопараметрическое семейство случайных величин.

Обозначим $P_k(t)$ вероятность того, что в фиксированный момент времени $x(t)=k$. Очевидно, что $\sum P_i(t)=1$ (1). Предполагая, в силу однородности потока, λ не зависящей от k , получаем рекуррентную формулу:

$$\dot{P}_k(t) = -\lambda(t) \cdot P_k(t) + \lambda(t) \cdot P_{k-1}(t) \quad (2)$$

Для $k=0, 1, 2, \dots$ получаем уравнения следующего вида (при $k=0$):

$$\dot{P}_0(t) = \lambda(t) \cdot P(t) \quad (3)$$

решением которого (Хинчин, 1965) при наших условиях будет:

$$P_0(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} \quad (4)$$

(при $k=1$)
$$\dot{P}_1(t)=\lambda(t) \cdot P_1(t)+\lambda(t) \cdot P_0(t) \tag{5}$$

и т.д.

Полунаемая система($k+1$) уравнений типа (3) и (5) с ($k+1$) неизвестными функциями $P_k(t)$, где $k=0, 1, 2, 3, \dots$ носит название системы $\mathfrak{P}$ -ланга. Принимая во внимание (1), из формулы (2) получаем:

$$P_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}=P\{x_t=k\} \tag{6}$$

которая по своему виду совпадает с формулой распределения Пуассона (Хальд, 1958).

В соответствии с выражением (6), на ЭВМ "Минск-22" были рассчитаны математические ожидания числа звезд, претерпевших то или иное число изменений периода. Результаты расчетов для каждого отдельно взятого скопления приведены в таблицах 2-7. Первый и второй столбцы имеют обозначения, идентичные с таблицей 1. В третьем столбце приведены математические ожидания n_i^0 числа звезд, претерпевших i раз изменения периода, рассчитанные в соответствии с выражением (6). В четвертом столбце даны значения критерия согласия χ^2 : $\chi^2=\frac{(n_i-n_i^0)^2}{n_i^0}$. Параметр β определялся по таблицам, приведенным в книге Романовского (1938).

Таблица 2.

NGC 5024			
Распределение Пуассона			
k	$n_i \text{набл.}$	n_i^0	χ^2
0	4	4	0.01
1	8	8	0.01
2	9	8	0.17
3	3	5	1.01
4	2	3	0.18
5	2	1	0.73
6	1	0	1.05
7	0	0	1.11
Σ	29	28.9	3.28
$\bar{X}=2.0345$		$\beta=0.78$	

Таблица 3.

NGC 5272			
Распределение Пуассона			
k	$n_i \text{набл.}$	n_i^0	χ^2
0	32	35	0.30
1	47	40	1.30
2	19	22	0.53
3	7	8	0.25
4	3	2	0.16
5	1	1	0.40
6	0	0	0.10
Σ	109	109	3.04
$\bar{X}=1.1284$		$\beta=0.7$	

Таблица 4.

NGC 5466

k	$n_{\text{набл.}}$	Распределение Пуассона	
		n_i^0	χ^2
0	5	5	0.01
1	7	6	0.11
2	3	4	0.11
3	1	1	0.12
4	1	1	0.81
5	0	0	0.10
Σ	17	17.0	1.26
$\bar{X}=1.765$		$\beta=0.87$	

Таблица 5.

NGC 5904

k	$n_{\text{набл.}}$	Распределение Пуассона	
		n_i^0	χ^2
0	15	22	2.27
1	35	22	7.03
2	7	11	1.70
3	3	4	0.19
4	1	1	0.00
5	0	0	0.20
Σ	61	61	11.39
$\bar{X}=1.0164$		$\beta=0.03$	

Таблица 6.

NGC 6171

k	$n_{\text{набл.}}$	Распределение Пуассона	
		n_i^0	χ^2
0	7	8	0.14
1	9	8	0.10
2	5	4	0.22
3	1	1	0.09
4	0	0	0.34
Σ	22	22	0.90
$\bar{X}=1.0000$		$\beta=0.83$	

Таблица 7.

NGC 7078

k	$n_{\text{набл.}}$	Распределение Пуассона	
		n_i^0	χ^2
0	18	21	0.48
1	22	18	0.79
2	9	8	0.18
3	1	2	0.69
4	0	0	0.48
Σ	50	50	2.61
$\bar{X}=0.8600$		$\beta=0.47$	

Из анализа результатов таблицы 2—7 следует, что наблюдаемые изменения периодов переменных звезд носят случайный характер и поэтому не являются результатом эволюционных изменений в соответствии с треками Ибена и Руда (1970), рассчитанными для фазы постепенного сгорания гелия в ядре и водорода в окружающем слое.

В следующей далее таблице 8 даны характеристики исследованных скоплений. Для каждого скопления приведено значение λ , рассчитанное из соотношения $Mx_t = \lambda \cdot t$, где Mx_t — математическое ожидание, а t — общее время наблюдения. Дан индекс металличности $[m/H]$ и переходный период $\lg P_{tr}$, взятые из каталога шаровых звездных скоплений нашей Галактики, составленного Кукаркиным (1974). Приводятся соотно-

шения $\frac{RR_{ob}}{RR_c}$:

Таблица 8.

NGC	5024	5272	5466	5904	6171	7078
Интервал времени исслед., в годах	53	55	45	73	36	36
λ	0.0415	0.0205	0.0296	0.0170	0.0254	0.0238
$[m/H]$	-1.75	-1.44	-1.87	-1.34	-0.79	-2.00
$\lg P_{tr}$	-0.28	-0.33	-0.24	-0.34	-0.36	-0.25
RR_{ob}/RR_c	0.83	0.18	0.81	0.34	0.5	-1.4

Шаровое звездное скопление NGC 7078 является крайне бедным металлами, а NGC 6171 — скопление с высоким содержанием металлов, однако наблюдаемые изменения периодов переменных звезд в обоих скоплениях хорошо представляются случайным процессом.

Аналогичные расчеты производились для групп скоплений, объединенных в соответствии с классификацией Оостерхоффа (1939), а также Миронова и Самуся (1974).

Результаты исследования приведены в таблицах 9—12. Условные обозначения такие же, как и в таблицах 2—7.

Таблица 9.

Скопления NGC 5272, NGC 5904, NGC 6171 (класс 00 I)

Распределение Пуассона

k	n_i набл.	n_i^0	χ^2
0	54	65	1.96
1	91	70	6.00
2	31	37	1.28
3	11	13	0.51
4	4	4	0.03
5	1	1	0.05
6	0	0	0.14
Σ	192	192	9.99
$\bar{X}=1.08$		$\beta=0.08$	

Таблица 10.
Скопления NGC 5024, NGC 5466, NGC 7078 (класс Oo II)

k	$n_{\text{набл.}}$	Распределение Пуассона	
		n_i^0	χ^2
0	27	27	0.00
1	37	34	0.22
2	21	22	0.03
3	5	9	1.93
4	3	3	0.00
5	2	1	2.12
6	1	0	4.50
7	0	0	0.03
Σ	96	96	8.83
$\bar{X}=1.27$		$\beta=0.21$	

Таблица 11.
Скопления NGC 5024, NGC 5466, Класс I (Миронов, Самусь)

k	$n_{\text{набл.}}$	Распределение Пуассона	
		n_i^0	χ^2
0	9	8	0.07
1	15	14	0.05
2	12	12	0.00
3	4	7	1.27
4	3	3	0.00
5	2	1	0.92
6	1	0	1.69
7	0	0	0.07
Σ	46		4.07
$\bar{X}=1.72$		$\beta=0.66$	

Таблица 12.
Скопления NGC 5272, NGC 5904, NGC 6171, NGC 7078
Класс II (Миронов, Самусь)

k	$n_{\text{набл.}}$	Распределение Пуассона	
		n_i^0	χ^2
0	72	86	2.32
1	113	89	6.48
2	40	45	0.77
3	12	16	0.92
4	4	4	0.00
5	1	1	0.03
6	0	0	0.14
Σ	242	242	10.68
$\bar{X}=1.03$		$\beta=0.06$	

Как видно из таблиц, ни одна из этих групп не противоречит предположению о том, что наблюдаемые изменения периодов переменных звезд типа RR Лир можно рассматривать как случайный процесс марковского типа с непрерывным временем.

В заключение приношу искреннюю и глубокую благодарность Н. В. Крылову за помощь в работе.

Литература:

- Агекян Т.А., 1974, "Теория вероятности для астрономов и физиков", "Наука", М.
- Горанский В.П., 1976, ПЗ (Приложение) 3, № 13, 1-69.
- Грызунова Т.И., 1972, ПЗ (Приложение) 1, № 4, 253-285.
- Ибен, Руд, 1970—Iben I., Jr, Rood R. T., ApJ 161, No2, 587-617.
- Кукаркин Б.В., 1956, АЦ № 173, 10-11.
- Кукаркин Б.В., 1974, "Каталог шаровых звездных скопления нашей Галактики", М.
- Кукаркин Б.В., Кукаркина Н.П., 1970, ПЗ 17, № 2, 157-185.
- Кукаркин Б.В., Кукаркина Н.П., 1971, ПЗ (Приложение) 1, № 1, 1-76.
- Кукаркина Н.П., Кукаркин Б.В., 1961, ПЗ 13, № 5, 309-316.
- Куттс, Сойер-Хогг, 1969—Coutts C. M., Sawyer Hogg H., Publ. DDO 3, No1, 3-58.
- Куттс, Сойер-Хогг, 1969—Coutts C. M., Sawyer Hogg H., Publ. DDO 3, No2, 61-77.
- Макарова В.А., Акимова В.П., 1965, ПЗ 15, № 4, 350-389.
- Миронов А.В., Самусь Н.Н., 1974, ПЗ 19, № 4, 337-356.
- Оостерхофф, 1939—Oosterhoff P.Th., Observatory 62, No779, 104-109.
- Романовский В.И., 1938, "Математическая статистика". Изд-во техн.-теор. лит., М.—Л.
- Сейдл, 1965—Szeidl B., Mitt. Sternw. Ungar. Wiss. Nr. 58.
- Хальд А., 1958, "Математическая статистика с техническими приложениями", ИЛ, М.
- Хинчин А.Я., 1965, "Математические методы теории массового обслуживания". Труды матем. ин-та, 49.

Педагогический ин-т,
г. Чимкент

*Поступила в редакцию
в августе 1977 г.
Окончательный вариант
поступил 26 мая 1978 г.*