Переменные звезды **20, 461 – 466, 1977**
Variable Stars **20, 461 – 466, 1977**

Представление кривой блеска затменной двойной звезды единственной системой элементов (частное затмение)

А.М. Шульберг

На примере анализа синтетической кривой блеска показано, что задача определения элементов затменной системы, в которой происходят частные затмения, имеет несколько решений.

Предлагается способ представления кривой блеска затменной двойной звезды (в случае частного затмения) единственной системой элементов.

Representation of Light Curve of an Eclipsing Binary with a Single System of Elements (Partial Eclipse)

by A.M. Schulberg

The analysis of a synthetic light curve shows that the problem of determination of elements of the eclipsing system in which partial eclipses occur has several solutions. The method of representation of a light curve of an eclipsing binary star by a single system of elements (in case of partial eclipse) is suggested.

Как показывает статистика, более чем у 70% всех известных затменных систем происходят частные затмения. Поэтому вся наша информация о размерах, массах и светимостях компонентов тесных двойных систем в значительной степени базируется на данных, получаемых при исследовании систем, в которых происходят частных затмения. С этой точки зрения вопрос о точности, с которой можно вычислить элементы затменных систем, приобретает особенно большое значение.

Известно, что целый ряд методов определения элементов затменных систем позволяет найти и ошибки этих элементов. К сожалению, мы не можем этого сделать, решая задачу методом Рессела–Меррила. Ошибки элементов зависят, в конечном счете, от ошибок фазовых углов θ, а значения фазовых углов θ при решении задачи методом Рессела–Меррила снимаются с графика, как абсциссы выбранных на сглаженной кривой блеска точек, соответствующих определенным величинам фотометрических фаз α.

Между тем, метод Рессела–Меррила, по нашему мнению, является самым простым методом определения элементов затменных систем и во многих случаях дает прекрасные результаты, не нуждающиеся в дальнейших улучшениях. В 1973 году автор и научный сотрудник Астрономической обсерватории ОГУ В.П.Мурникова разработали способ определения ошибок элементов затменных систем при решении их кривых блеска методом Рессела–Меррила (Шульберг, Мурникова, 1973).

Мы отказались от проведения сглаженной кривой блеска. Нужные для решения задачи методом Рессела–Меррила абсциссы точек кривой блеска были найдены при помощи интерполирования по таблице с переменным шагом. Этой таблицей является совокупность координат нормальных точек кривой блеска (α_i, θ_i). Такой прием позволил найти предельные ошибки фазовых углов $\theta_j(\alpha_j)$ и по ним – ошибки элементов системы. Способ был испытан при определении элементов S Cnc (полное затмение) и YZ Cas (кольцеобразное затмение). Получены вполне удовлетворительные результаты. Позже мы попытались найти ошибки элементов системы, в которой происходят частные затмения, таким же способом. Для испытания способа была выбрана система TV Cas (фотоэлектрические наблюдения Хаффера и Копала). Зная заранее, что главный минимум кривой блеска TV Cas соответствует прохождению, мы тем не менее искали элементы системы при двух предположениях – главный минимум соответствует прохождению и – главный минимум соответствует покрытию. Неожиданно было получено два равноточных решения – одно при гипотезе "ОС", второе – при гипотезе "tr" (Шульберг, Мурникова, 1974). К этому можно прибавить хорошо известный факт: при определении элементов затменных систем, в которых происходят частные затмения, методом Рессела–Меррила, часто получают несколько немного различных решений. Во-первых, χ– кривые $k_\chi(\alpha_0)$, построенные для нескольких (5–6) значений $n = (1-l)/(1-l_0)$ иногда пересекаются в нескольких точках и, во-вторых, кривая глубины $k_q(\alpha_0)$ часто пересекает χ– кривые еще в нескольких точках.

В последнее время, из-за необходимости использования сглаженных кривых блеска, метод Рессела–Меррила применяется довольно редко. Поэтому мало кто обращал внимание на некоторую неопределенность, возникающую при отыскании элементов затменных систем с частными затмениями методом Рессела–Меррила.

Исследование системы TV Cas показало, что наличие нескольких равноточных (в пределах ошибок наблюдений) решений кривой блеска затменной системы с частными затмениями, является не недостатком метода Рессела–Меррила, а вызвано тем, что задача в принципе имеет несколько решений. Чтобы внести полную ясность в этот вопрос, мы предприняли данную работу.

Была выбраны система элементов

$$i = 80°,\ k = 0.80,\ r_1 = 0.25,\ r_2 = 0.20,\ L_1 = 0.4,\ x_1 = x_2 = 0.4.$$

По этим элементам мы построили кривую блеска (назовем ее синтетической):

$$p(\theta) = (\sqrt{1-\sin^2 i\,\cos^2\theta} - r_1)/r_2$$

($\theta° = 0.0,\ 2.5,\ 5.0,\ 7.5,\ 10.0,\ 15.0,\ 20.0,\ 23.0$). По p и k нашли из таблицы $^{x}\alpha^{oc}(k,p)$ значения $\alpha^{oc}(\theta)$ (α_o^{oc} получилось равным 0.6634). Вычислили

$$n(\theta) = \frac{\alpha(\theta)}{\alpha_o} = \frac{1-l}{1-l_o}.$$

Нашли $1-l_o^{oc} = L_2 \, a_o^{oc}$

и получили все

$$1-l^{oc} = n\,(1-l_o^{oc}).$$

Были также найдены

$$1-l_o^{tr} = L_1 \, \tau(k) \, a_o^{tr} \, (p_o, \, k).$$

Сохраняя значения n и величины $1-l_o^{oc}$ и $1-l_o^{tr}$, изменили немного величину a_0^{oc}. Мы выбрали $a_o^{oc} = 0.6000$, вычислили новые значения $a_1^{oc} = n\,a_{o1}^{oc}$ и, используя уравнение глубины $a_o^{oc} = 1-l_o^{oc} + (1-l_o^{tr})/q_o$ определили величину q_o, а из таблицы $k(q_o, a_o^{oc})$ (Меррил, 1950), нашли новое значение $k = k_1 = 0.916$. Далее по k_1 и a_1^{oc} определили новые значения $p = p_1$, вычислили величины

$$ctg^2 i = \frac{sin^2\theta_n \,(1 + k_1 \, p_{01})^2}{(1 + k_1 \, p_{n1})^2 - (1 + k_1 \, p_{01})^2},$$

$$r_{11} = cos\, i/\,(1 + k_1 \, p_{01}); \qquad r_{21} = k_1 \, r_{11};$$

$$L_{21} = (1-l_o^{oc})/a_{01}^{oc} \quad \text{и} \quad L_{11} = 1-L_{21}.$$

По новым элементам построили кривую блеска. Получили $1-l_1$ и нашли $l(\theta) - l_1(\theta)$ — аналог $l_{ob} - l_c$ (в дальнейшем — О – С).

Подобные операции были проделаны три раза для значений $a_o^{oc} = 0.6000$, 0.7000, 0.8000. Были получены три различные системы элементов. Построенные по этим элементам три кривые блеска мало отличаются друг от друга и от синтетической кривой.

Сказанное иллюстрируется таблицей I. Эта таблица содержит полученные нами при варьировании a_o^{oc} величины элементов трех различных затменных систем и средние модули разностей $l_{ob} - l_c$, характеризующие степень различия кривых блеска, построенных по полученным элементам, от синтетической кривой.

Таблица I

a_o^{oc}	i	k	L_1	$\overline{\lvert l_{ob}^{oc} - l_c^{oc} \rvert}$	$\overline{\lvert l_{ob}^{tr} - l_c^{tr} \rvert}$
0.6000	80°.24	0.916	0.337	0.0013	0.0007
0.7000	80.00	0.750	0.431	0.0009	0.0004
0.8000	80.24	0.644	0.502	0.0028	0.0028

Проделанные нами построения не зависят от метода определения элементов затменных систем. Полученные результаты являются, таким образом, доказательством существования нескольких решений задачи об определении элементов затменной системы, в которой происходят частные затмения (конечно, в рамках ресселовской модели и в пределах ошибок наблюдений). В этом свете недостаток метода Рессела-Меррила — многозначность решения — превращается в его положительное качество. В самом деле, несмотря на то, что задача принципиально имеет несколько решений, все методы ее решения, кроме метода

Рессела-Меррила, дают только один ответ. Метод же Рессела-Меррила дает несколько решений.

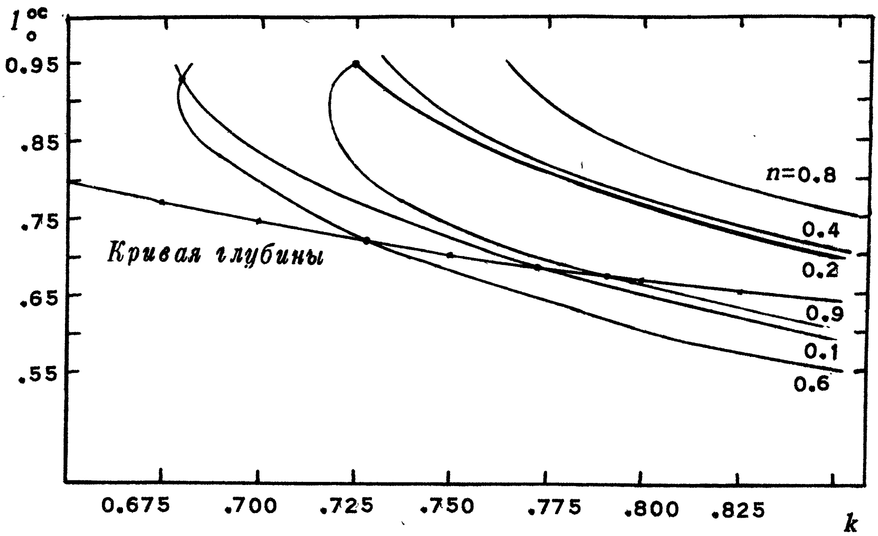

Рис.1.

Решая синтетическую кривую, мы построили не две, а шесть χ –кривых и кривую глубины для главного минимума (то же было проделано и для вторичного минимума). Как видно на рис. 1,χ–кривые пересекаются в двух точках: k= 0.680 и k= 0.725. Кроме того, кривая глубины пересекает χ–кривые еще в трех точках k= 0.726, 0.773, 0.797. Всего пять значений k– от 0.680 до 0.800. (Аналогичная картина получается и для вторичного минимума).

В одной из своих работ Ирвин (1967), желая показать, что методом Рессела-Меррила можно получить при частных затмениях единственное решение, задался такими параметрами затменной системы: a_o^{oc} = 0.7000, k= 0.6, r_1 = 0.3, L_2= 0.7, x= 0.5, построил две χ–кривые (n=0.2 и 0.8) и кривую глубины. Все они пересеклись в точке a_o^{oc} = 0.7, k =0.6. Этого, конечно, следовало ожидать. Ведь Ирвин кроме элементов системы задался еще и величиной a_o^{oc} , т.е., Ирвин задался одновременно величинами k и a_o^{oc} . Задача потеряла многозначность, решение может быть только одно.

Мы проделали пример Ирвина по нашей методике. Были выбраны такие элементы системы: i = 75°, k= 0.6, r_1 = 0.3, L_2= 0.7, x= 0.6. По этим элементам была построена кривая блеска, т.е., были получены величины: a_o^{oc} = 0.5949, $1-l_o^{oc}$ = 0.4164, $1-l_o^{tr}$ = 0.0613 и все $1-l^{oc}$ = $n\,(1-l_o^{oc})$. Далее, сохраняя полученные n и $1-l_o$, выбрали a_o^{oc} = 0.65, вычислили новые элементы, построили по ним кривую блеска и нашли $O-C$. Затем выбрали a_o^{oc} = 0.70 и проделали то же самое. Полученные результаты приведены в таблице II.

Таблица II

a_0^{oc}	i	k	L_1	$\overline{\|O-C\|}$
0.65	74°41′	0.524	0.359	0.0010
0.70	74 44	0.480	0.405	0.0024

Как видно, результат тот же, что и в нашем случае. Интересно, что во всех решениях (как в нашем случае, так и в случае Ирвина), наклонение i остается практически неизменным — меняются относительные размеры звезд и их относительный блеск.

Итак, кривые блеска затменных двойных звезд с частными затмениями одинаково хорошо представляются разными системами элементов (различие в k может достигать 0.3, а в L — 0.2). Различия между кривыми блеска, построенными по этим элементам, и синтетической кривой блеска меньше ошибок современных электрофотометрических наблюдений.

Поскольку многозначность решения рассматриваемой нами задачи значительно усложняет проблему оценки его точности, мы сделали попытку разработки способа, который позволял бы выбрать из всех решений наилучшее. Предлагается сделать это следующим образом:

Находим каким-нибудь методом величины k и a_0. После вычисления всех элементов системы, строим теоретическую кривую блеска и определяем $\overline{|O-C|}$. Затем, сохраняя неизменными полученные нами величины n, выбираем значение $a_{01} = a_0 + 0.05$, находим новые элементы, строим по ним теоретическую кривую и определяем новое значение $\overline{|O-C|}$. Если новое $\overline{|O-C|}$ меньше первого, производим следующий цикл вычислений, положив $a_{02} = a_0 + 2 \cdot 0.05$, и так до тех пор, пока очередное $\overline{|O-C|}$ не окажется больше предыдущего. Очевидно, что если $\overline{|O-C|}$, соответствующее a_{01}, окажется больше первого $\overline{|O-C|}$, нужно положить $a_{01} = a_0 - 0.05$ и проделать все вычисления, уменьшая a_0^{oc}.

В результате такого варьирования a_0^{oc} мы получаем четыре-пять значений $\overline{|O-C|}$.

В качестве искомой величины k можно взять его средневзвешенное значение $\Sigma W_i k_i / \Sigma W_i$, где вес $W \sim 1/[\overline{|O-C|}]^2$

Так, например, мы имели

a_0^{oc}		= 0.600	0.700	0.800
k^o		= 0.916	0.750	0.644
$\overline{\|O-C\|}$		= 0.0013	0.0009	0.0028
	$[\overline{\|O-C\|}]^2$	= 0.00000169	0.00000081	0.00000784
W		= 6	12	1.3

Искомое $k = \Sigma W_i k_i / \Sigma W_i = 0.795$ и $a_0^{oc} = \Sigma W_i a_{0i}^{oc} / \Sigma W_i = 0.676$, а истинные значения (т.е., те, которыми мы задались) k и a_0^{oc} равны соответственно 0.800 и 0.663.

Характеристикой точности результата по-прежнему остается величина $\overline{|O-C|}$, соответствующая средневзвешенному значению параметра k.

В заключение хочется сделать одно замечание.

В настоящее время разработаны методы, позволяющие находить элементы затменных двойных систем полностью с помощью ЭВМ (напр., методы Табачника, Черепащука, Горака, Вильсона и Девини). Каждый из этих методов имеет свои положительные и отрицательные качества, и все они имеют одно общее свойство – решение задач этими методами (в особенности – последними двумя) мало зависит от сложности самих задач – во всех случаях оно требует большой затраты машинного времени. Между тем, существует множество затменных систем, где достаточно точное решение (в рамках принятой модели) можно получить, применяя классические методы – в частности, метод Рессела-Меррила. Применение этого метода в нашей модификации (Шульберг, Мурникова, 1974 а) требует значительно меньше машинного времени, а в случае необходимости, задачу можно быстро решить с помощью обыкновенного арифмометра.

Нам кажется, что во многих случаях, и в зависимости от исследуемых объектов, и в зависимости от цели исследования, выгоднее решать задачи методом Рессела-Меррила в предлагаемой нами модификации, чем заниматься дорогостоящими вычислениями на мощных ЭВМ.

Автор надеется, что никто не заподозрит в нем противника применения ЭВМ для интерпретации кривых блеска затменных систем. Именно в Одессе лет 12-13 тому назад по инициативе и под руководством автора впервые в СССР были начаты работы по применению ЭВМ в теории затменных двойных звезд. В нашем замечании речь идет не об отказе от использования ЭВМ, а о разумном, экономном их применении при решении задач теории затменных двойных звездных систем.

Литература:

Ирвин Дж., 1967, в кн. "Методы астрономии", ред. В.А.Хилтнер, стр. 516, М, "Мир".
Меррил, 1950 – Merrill J.E., Princ. Contr. 23.
Шульберг А.М., Мурникова В.П., 1973, АЦ №779.
Шульберг А.М., Мурникова В.П., 1974, АЦ №835.
Шульберг А.М., Мурникова В.П., 1974 а, ПЗ 19, 421,

Астрономическая обсерватория
Одесского государственного
университета

*Поступила в редакцию
17 сентября 1975 г.*