

Переменные звезды 20, 13–25, 1975
Variable Stars 20, 13–25, 1975

Корреляционный и спектральный анализ блеска звезд типа RW Aur И. А. Ключ, И. И. Лобусов

Проведен статистический анализ блеска 16 переменных звезд типа RW Aur. Основу анализа составляет формула для вычисления корреляционной функции рядов с разрывами. Показана состоятельность ее применения как для периодических, так и для непериодических переменных. Спектральная плотность вычислялась с применением временного окна Парзена. Оценка статистических спектров звезд производилась по доверительным интервалам. Приводятся графики корреляционных функций и статистических спектров анализируемых звезд. Показано, что изменение блеска звезд типа RW Aur не является белым шумом. Обсуждаются полученные результаты.

Correlation and Spectral Analysis of the Variability of RW Aurigae Type Stars by I. A. Klyus, I. I. Lobusov

A statistic analysis of variability of 16 RW Aur-type stars has been carried out. The analysis is based on the formula for calculating the correlation function of series with discontinuities. The consistency of its application is shown both for periodic and nonperiodic variables. Spectral density has been calculated with the aid of correlation window by Parsen. The estimation of statistic spectra has been made from confidence intervals. The plots of correlation functions and statistic spectra of stars analyzed are presented. The light variations of RW Aur-type stars are shown not to be the white noise. The discussion on the results obtained is given.

1. Вопросу применения методов статистического анализа к исследованию блеска неправильных переменных звезд посвящена обширная литература. Наиболее полно эти методы рассмотрены в работах Лукацкой (1969) и Плейжмана (1969). Однако, применение методов корреляционного и спектрального анализов в этих работах имеет существенные недостатки. Во-первых, применение для вычисления корреляционной функции (КФ) формулы вида:

$$R_r = \frac{\sum_{i=1}^{n_r} U_i U_{i+r}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_r} U_i^2 \sum_{i=1}^{n_r} U_{i+r}^2}} \quad (1)$$

приводит к тому, что КФ не является положительно определенной, в результате чего спектр, вычисленный по этой формуле, становится отрицательным и неустойчивым (Дженкинс, Ваттс, 1971). Во-вторых, к вопросу об аппроксимации КФ аналитическими формулами необходимо подходить осторожно, ибо аппроксимирующая функция сильно сглаживает КФ, тем самым, приводит к потере ее тонкой структуры. Особенно это относится к сильно флуктуирующим КФ. И, в-третьих, представление наблюдений звезд в виде непрерывного временного ряда, как это делает Плейжман (1969), может существенно исказить результаты анализа.

2. Основная трудность применения метода статистических исследований неправильных переменных звезд заключается в том, что наблюдения звезд не являются непрерывными. Однако, основываясь на некоторых предположениях относительно ряда наблюдений, эту трудность можно преодолеть.

КФ вычислялась по следующей формуле:

$$C_r = \frac{\sum_{i=1}^{n_r} U_i U_{i+r}}{\sum_{i=1}^n U_i^2}, \quad (2)$$

где n — общее число наблюдений звезды, $U_i = X_i - \bar{X}$ — член ряда разностей, для которого имеется член U_{i+r} , смещенный на r единичных интервалов времени, n_r — число таких пар, входящих в выражение C_r , X_i — значения блеска переменной звезды, \bar{X} — среднее значение блеска на всем интервале наблюдений.

Покажем из каких предположений выведена формула (2) и рассмотрим ее связь с формулой для КФ непрерывного ряда наблюдений, причем интервал наблюдений, как ряда с разрывами, так и непрерывного ряда одинаков. Будем исходить из следующего предположения: имеющиеся наблюдения переменных звезд не являются селективными, т. е. ансамбль наблюдений полностью описывает поведение звезды. Из этого можно заключить, что средние значения $\overline{U_i}, \overline{U_i U_{i+r}}, \overline{U_i^2}$, полученные из наблюдений, должны быть равны средним значениям $\overline{U'_i}, \overline{U'_i U'_{i+r}}, \overline{U_i'^2}$, по промежуткам времени, когда наблюдения не проводились, т. е.:

$$\overline{U_i} = \overline{U'_i}, \quad \overline{U_i U_{i+r}} = \overline{U'_i U'_{i+r}}, \quad \overline{U_i^2} = \overline{U_i'^2}. \quad (3)$$

Полный ряд разностей, входящих в КФ, будет состоять из членов U_i и U'_i , где U_i — члены, для которых имеются U_{i+r} , $U'_i = X_i - \bar{X}$, члены ряда, для которых при выбранном r нет произведения $U'_i U'_{i+r}$ из-за пропусков одного или обоих членов произведения. Пусть число U'_i равно n'_r . Обозначим через n' — общее количество пропущенных наблюдений.

Тогда:

$$n_r + n'_r = N - r, \quad n + n' = N, \quad (4)$$

где N — общее число наблюдений, сделанных через равные интервалы времени.

Рассмотрим формулу для вычисления КФ непрерывного ряда наблюдений:

$$R_{\tau} = \frac{\frac{1}{N-\tau} \sum_{i=1}^{N-\tau} U_i U_{i+\tau}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_i^2} = \frac{\frac{1}{N-\tau} \sum_{i=1}^{n_{\tau}} U_i U_{i+\tau} + \frac{1}{N-\tau} \sum_{i=1}^{n'_{\tau}} U'_i U'_{i+\tau}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n U_i^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n'} U_i'^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{N-\tau} (n_{\tau} \overline{U_i U_{i+\tau}} + n'_{\tau} \overline{U'_i U'_{i+\tau}})}{\frac{1}{N} (n \overline{U_i^2} + n' \overline{U_i'^2})}$$

Использование (3) и (4) дает:

$$R_{\tau} = \frac{\frac{n_{\tau} + n'_{\tau}}{N-\tau} \overline{U_i U_{i+\tau}}}{\frac{n + n'}{N} \overline{U_i^2}} = \frac{\frac{1}{n_{\tau}} \sum_{i=1}^{n_{\tau}} U_i U_{i+\tau}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i^2} = \frac{n}{n_{\tau}} C_{\tau}$$

Таким образом, формула для вычисления КФ — (2) связана с формулой для вычисления КФ по равномерным наблюдениям следующим соотношением:

$$C_{\tau} = \frac{n_{\tau}}{n} R_{\tau} \quad (5)$$

Из (5) видно, что C_{τ} является смещенной оценкой КФ и лишь при $n \rightarrow \infty$ $C_{\tau} \rightarrow R_{\tau}$, т. е. C_{τ} является состоятельной оценкой КФ. Оценка КФ, даваемая формулой (2), имеет свои преимущества. Как показали Дженкинс и Ваттс (1971) и Шаерф (1964) средняя квадратичная ошибка смещенной оценки меньше, чем у несмещенной. Оценка КФ, вычисленная по формуле (2), является положительно определенной. Формула (5) показывает, что оценка КФ зависит не только от количества наблюдений, но и от коэффициента добротности наблюдений $\Pi_{\tau} = n_{\tau}/n$. Когда $\Pi_{\tau} \rightarrow 0$, $C_{\tau} \rightarrow 0$, т. е. КФ описывает белый шум.

При $\Pi_{\tau} \rightarrow \frac{N-\tau}{N}$, C_{τ} будет смещенной оценкой КФ, описывающей непрерывные ряды наблюдений.

Коэффициент добротности Π_{τ} можно повысить. Например, если в среднем одно наблюдение приходится на 5 дней, то усреднение наблюдений по пяти дням повышает среднее значение π_{τ} . Однако, усреднение ряда наблюдений по большому числу дней нежелательно, ибо при этом сглаживание исходного ряда наблюдений приводит к тому, что полезная информация становится соизмеримой с шумами.

Оценка КФ, полученная по формуле (2), может оказаться значительно заниженной при небольших значениях коэффициента добротности. Однако, если несмотря на это, в спектре присутствуют детали, превышающие доверительный интервал, то можно с большой вероятностью утверждать, что они соответствуют действительности.

Формула (2) может быть применена для вычисления КФ везде, где имеются наблюдения с разрывами. Например, в радиоастрономии, для поисков периодов переменных звезд, для статистических исследований солнечной активности и т. д.

3. Методика вычисления. Наблюдения блеска переменной звезды X_i , усредненные за день, центрируются относительно среднего значения \bar{X} . Помимо этого, убирается линейный тренд. Эти операции выполняются при помощи формулы:

$$U_i = X_i - \bar{X} - M \cdot (t_i - \bar{t}), \quad (6)$$

где U_i — центрированные наблюдения; t_i — моменты наблюдений и \bar{t} — среднее время.

Коэффициент линейного тренда M вычислялся методом наименьших квадратов по формуле

$$M = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i t_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i\right)^2} = \frac{\overline{x \cdot t} - \bar{x} \cdot \bar{t}}{\overline{t^2} - \bar{t}^2}. \quad (7)$$

Наблюдения и моменты наблюдений представляют два отдельных массива. Поскольку наблюдения звезд имеют разрывы, то интервал времени между двумя соседними наблюдениями необязательно должен быть равным интервалу усреднения — Δt , а может быть любым.

Для вычисления КФ рассматриваются различные сдвиги в массиве наблюдений от 1 до L , где L — максимально допустимое значение сдвига τ по времени.

Рассмотрим j -тый сдвиг относительно i -того наблюдения, т. е. возьмем наблюдения U_i и U_{i+j} с моментами времени t_i и t_{i+j} . Определяем целое число P , равное

$$P = \frac{t_{i+j} - t_i}{\Delta t} \quad (8)$$

и если $P \leq L$, то произведение $U_i U_{i+j}$ запишется в P -тое значение КФ. Наблюдения, для которых $P > L$, отбрасываются.

Рассмотрим выбор максимального запаздывания, или максимальной точки отсечения КФ — L . Обычно L выбиралось равным одной десятой от общего количества наблюдений n . Действительно, ансамбль наблюдений можно считать представительным для описания циклов равных $0.1 \cdot n$ и заведомо достаточным для описания циклов, длительность которых меньше $0.1 \cdot n$.

Спектральные плотности $S(i)$ вычислялись по формуле:

$$S(i) = 2 \cdot \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{L-1} C_k \cdot W(k) \cos \frac{\pi \cdot i \cdot k}{F} \right], \quad (9)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, F,$$

где $W(k)$ — весовая функция или окно, F — величина, равная половине периода, по которому КФ разлагается в ряд Фурье (F принималось равным $2L$).

В качестве окна $W(k)$ использовалось окно Парзена:

$$W(k) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{K}{L}\right)^2 + 6\left(\frac{K}{L}\right)^3, & K \leq \frac{L}{2}; \\ 2\left(1 - \frac{K}{L}\right)^3, & \frac{L}{2} < K < L; \\ 0, & K > L. \end{cases} \quad (10)$$

Выбор окна Парзена обусловлен тем, что утечка мощности в боковые лепестки у него минимальна, по сравнению с другими окнами (Дженкинс, Ваттс, 1971). Кроме того, оценки спектра, получаемые с помощью окна Парзена, всегда неотрицательны

В работе Дженкинса и Ваттса (1971) показано, что оценку выборочного спектра можно приблизить с помощью χ^2 -распределения, имеющего ν степеней свободы. Значение ν позволяет вычислить доверительный интервал оценки спектра.

Для окна Парзена число степеней свободы определяется формулой вида:

$$\nu = 3.71 \cdot \frac{T}{L}, \quad (11)$$

где T — длина интервала времени непрерывных наблюдений или, что тоже самое, общее число наблюдений.

Для наблюдений с разрывами необходимо длину интервала наблюдений T заменить на количество наблюдений n , что равносильно представлению ряда наблюдений с разрывами в интервале T , рядом непрерывных наблюдений в интервале n .

Таким образом,

$$\nu = 3.71 \cdot \frac{n}{L}.$$

С учетом вышенаписанного ширина полосы частот окна запишется:

$$B = \frac{1.86}{L},$$

а отношение дисперсии сглаженной оценки к несглаженной — $\frac{I}{T}$ определяется выражением:

$$\frac{I}{T} = 0.539 \frac{L}{n}.$$

При $L = 0.1 \cdot n \cdot \frac{I}{T} = 0.054$ или 5.4% от несглаженной оценки. Для того,

чтобы изменчивость спектра могла быть выражена удобным образом, спектр нужно строить в логарифмическом масштабе, т. к. при этом построение доверительного интервала для спектра сводится к откладыванию около выборочной оценки одного и того же доверительного интервала для всех частот.

Чем меньше точка отсечения корреляционной функции L , тем меньше дисперсия сглаженной оценки спектра. Однако, малое значение L может привести к большому смещению оценки спектра. Следовательно, нужно найти компромисс между дисперсией и смещением.

Оптимальным методом в этом случае оказался метод стягивания окна. Он заключается в вычислении спектра для трех значений точек отсечения КФ. Причем каждый последующий шаг вычислений увеличивает точку отсечения КФ в два раза. Из всех значений спектра выбирается тот, у которого наиболее характерно выявляются его особенности при минимальных искажениях.

4. *Результаты вычислений.* Вычислены корреляционные функции 16 звезд типа RW Aur, данные которых приведены в таблице 1. Наблюдения всех звезд были взяты из работы Цесевича и др. (1973).

На рисунках 1–4 для каждой из звезд изображены графики корреляционной функции (слева) и спектра (справа). На графиках КФ по оси абсцисс отложены запаздывания по времени τ в днях, по оси ординат значения корреляционной функции. Значение КФ при $\tau = 0$, равно единице, на графиках не приводится.

Вопреки общепринятому положению отмечать по оси абсцисс графика спектра время (в днях), по оси абсцисс отложена частота. Масштаб по частоте взят линейным, т. к. ширина полосы частот окна остается постоянной для такого масштаба. Ширина полосы частот на графиках изображена горизонтальной стрелкой. Единицей частоты служит частота, определяемая как одно колебание в день. Для перехода к временной зависимости каждой из точек спектра в днях необходимо взять величину обратную частоте.

График спектральной плотности строился в логарифмическом масштабе. Преимущество логарифмического масштаба состоит не только

Таблица 1

Звезда	Тип	Число наблюдений (уср. на 1 ^d)	Длительность наблюдений в сутках	Sp	Амплитуда
FG Aql	Is?	210	7682	—	1.71
FH Aql	Is?	210	7682	—	2.49
V948 Aql	SRa	167	7682	—	1.31
V925 Aql	Ins	304	7715	K5	1.20
UY Aur	Ins	229	6998	dG5e(T)	2.61
BQ Ser	Cep	318	6518	F5 III	1.86
DD Ser	SR	606	9482	A0	1.70
RY Tau	InT	211	7443	dF8e-dG2e(T)	2.46
DF Tau	InT	211	7443	dM0e(T)	3.41
DG Tau	InTs	211	7443	dGe(T)	4.01
AA Tau	Inbs	427	17435	dM0e	4.09
DL Tau	InT	360	17435	dGe(T)	1.60
DN Tau	InT	211	7443	dKGe(T)	0.83
DO Tau	InT	386	15242	dGe(T)	4.10
WW Vul	Isa	245	7412	A3e	1.73
K3П439	—	195	9108	(M7)	1.73

в том, что он лучше выявляет детали спектра, но и также в том, что в этом случае доверительные интервалы одинаковы для всех частот.

Для спектра доверительный интервал изображен вертикальной стрелкой, внизу которой указывается число соответствующее точке отсечения КФ. Были взяты 80% доверительные интервалы.

Для проверки выдвинутых предположений предварительно вычислены КФ и спектры периодических звезд X Lac и CR Ser по наблюдениям Макаренко (1969). Вид КФ свидетельствует о том, что процессы изменения блеска звезд являются периодическими с четко выраженными модулирующими явлениями. Модулирующие явления КФ — результат зависимости числа наблюдений от лунного синодического месяца.

Спектры этих звезд дают периоды, равные $f = 0.180 \text{ d}^{-1}$ ($5^{\text{d}}.45$) и $f = 0.160 \text{ d}^{-1}$ ($6^{\text{d}}.25$), соответственно, что хорошо согласуется с ОКПЗ, в котором они равны $5^{\text{d}}.44$ и $6^{\text{d}}.23$. Следует заметить, что оценки спектров X Lac и CR Ser сглажены. Более точную оценку спектра можно получить, уменьшая ширину полосы частот. Однако, поскольку количество наблюдений было небольшим — 220, при дальнейшем стягивании окна спектр становится неустойчивым, что приводит к появлению ложных пиков.

Из рис. 1 видно, что у CR Ser, кроме основного пика, нет заметных других, в то время как у X Lac заметная доля мощности приходится на низкие частоты. Более длительные наблюдения, возможно, позволили бы локализовать максимум мощности на низких частотах.

Однако, из сравнения спектров X Lac и CR Ser уже сейчас можно сделать качественный вывод: период X Lac должен меняться быстрее, чем у CR Ser, что согласуется с выводами Макаренко (1968).

Вычисления показывают, что у звезд, которые Цесевич и др. (1973) относят к звездам типа RW Aur, кроме BQ Ser, в интервале от двух до 150-ти дней периоды отсутствуют, хотя, однако, у некоторых звезд наблюдаются циклы.

У звезды BQ Ser как КФ, так и спектр оказались подобными КФ и спектру периодических звезд. Спектр BQ Ser (рис. 1) выявляет у нее основной период равный $4^{\text{d}}.30$ (ОКПЗ определяет его значение 4.31) и показывает заметное сосредоточение мощности на частоте $f = 0.333 \text{ d}^{-1}$ и низких частотах. По-видимому, у BQ Ser имеется второй период равный 3^{d} , хотя и маломощный.

Характерной особенностью КФ всех остальных звезд при малых значениях τ является быстрое убывание КФ. Это может свидетельствовать о том, что процессы, порождающие изменение блеска звезд типа RW Aur, некоторое время сохраняют свои тенденции. По-видимому, наиболее приемлемой физической интерпретацией таких явлений является предположение Курочкина (1963) о наличии у звезд типа RW Aur конвективной зоны с изменяющимися состояниями. Однако, пока не будут вычислены КФ и спектры большего числа звезд, с более длительными и качественными рядами наблюдений, переход к теоретической интерпретации явлений представляется нецелесообразным. При этом особенно желательными являются электрофотометрические наблюдения в системе UVV.

У звезд FG Aq1, FH Aq1 и DL Tau (рис. 1, 2) КФ длительное время принимает отрицательные значения, что приводит к появлению в спектре горбов на низких частотах. К сожалению, небольшое число наблюдений не позволяет более детально выявить их форму.

КФ и спектры звезд DL Tau, RY Tau, AA Tau и DN Tau (рис. 1) показывают присутствие цикличности. Резкие пики на нисходящей части КФ приводят к появлению горбов, сравниваемых с доверительным интервалом на графике спектра. У DL Tau имеется горб в спектре на частоте $f = 0.37 \text{ d}^{-1}$ ($2^{\text{d}}7$), у RY Tau и AA Tau максимум горбов приходится на частоту $f = 0.500 \text{ d}^{-1}$ (2^{d}).

Помимо этого у AA Tau имеется горб на частоте $f = 0.223 \text{ d}^{-1}$ ($4^{\text{d}}5$). DN Tau имеет заметный горб на частоте $f = 0.240 \text{ d}^{-1}$ ($4^{\text{d}}17$).

Для проверки реальности этих горбов необходимо вычислить КФ и спектры этих звезд по другим наблюдениям. Корреляционная функция звезды DD Ser показывает присутствие цикличности у этой звезды. Однако, на спектре DD Ser горбы едва видны. Поскольку DD Ser имела большое количество наблюдений, это позволило усреднить их по 5-ти дням и получить ее КФ и спектр. На рис. 3 КФ и спектр ее помечен как DD Ser 5^{d} . На КФ интервал между двумя точками $\tau = 5$, а на оси абсцисс графика спектра отложена частота, единица которой равна одному колебанию в 5 дней, т. е. $f_{(5)} = 0.2 f$. На графике КФ отчетливо видны пики, что указывает на существование цикличности у кривой блеска этой звезды. Спектр DD Ser 5^{d} содержит два заметных горба, соответствующих 10^{d} и $27^{\text{d}}3$.

Они присутствуют и в спектре DD Ser. Причем горб, соответствующий 10^{d} ($f = 0.100$), виден на спектре DD Ser отчетливо, а горб, соответствующий $27^{\text{d}}3$ ($f = 0.037$), едва намечается из-за присутствия большой мощности на низких частотах. КФ и спектры рис. 3, 4 остальных звезд, не содержат заметных особенностей.

Для проверки гипотезы не является ли процесс изменения блеска звезды типа RW Aur белым шумом при помощи программного генератора случайных гауссовых чисел имитировали наблюдения звезд FG Aq1 и DF Tau. Причем, моменты наблюдения звезды и их имитация брались одинаковыми. КФ этих звезд незначительны, рис. 4, а спектр полностью находится внутри доверительного интервала и не соответствует КФ и спектрам истинных звезд, что указывает на то, что изменение блеска звезд типа RW Aur не является белым шумом.

Применение λ -критерия Колмогорова-Смирнова (Дженкинс и Ваттс, 1971) к спектральной функции FG Aq1 и ее имитации полностью подтверждает эти выводы.

На рис. 5 по оси ординат отложены значения нормированной спектральной функции $-i(f_k)$ для дискретного спектра. Нормированная спектральная функция вычислялась по формуле

$$i(f_k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k S(f_i), \quad (12)$$

где f_k — граничная частота, f_i — промежуточная частота, $S(f_i)$ — нормированная спектральная плотность, определяемая формулой (9).

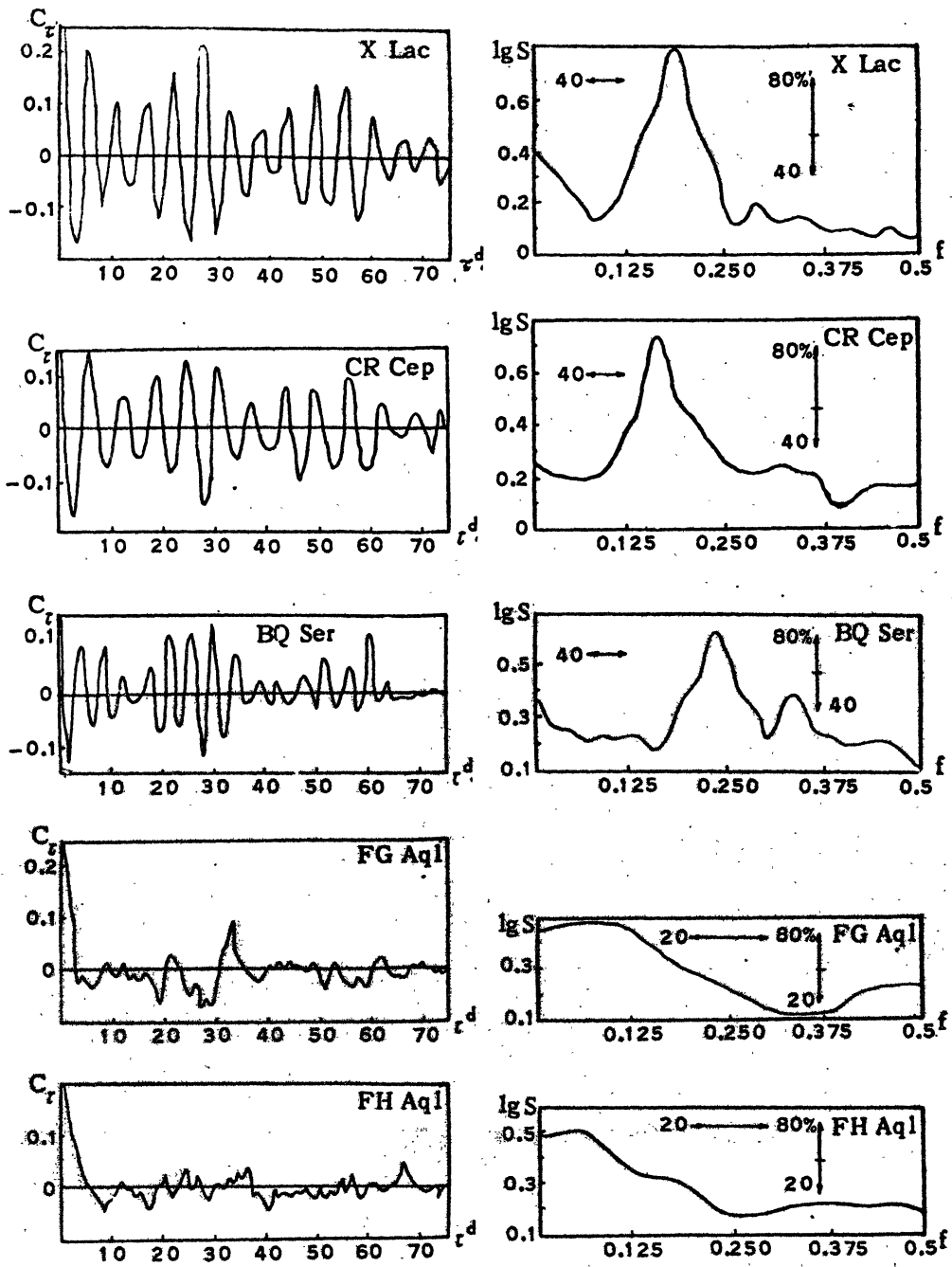


Рис. 1.

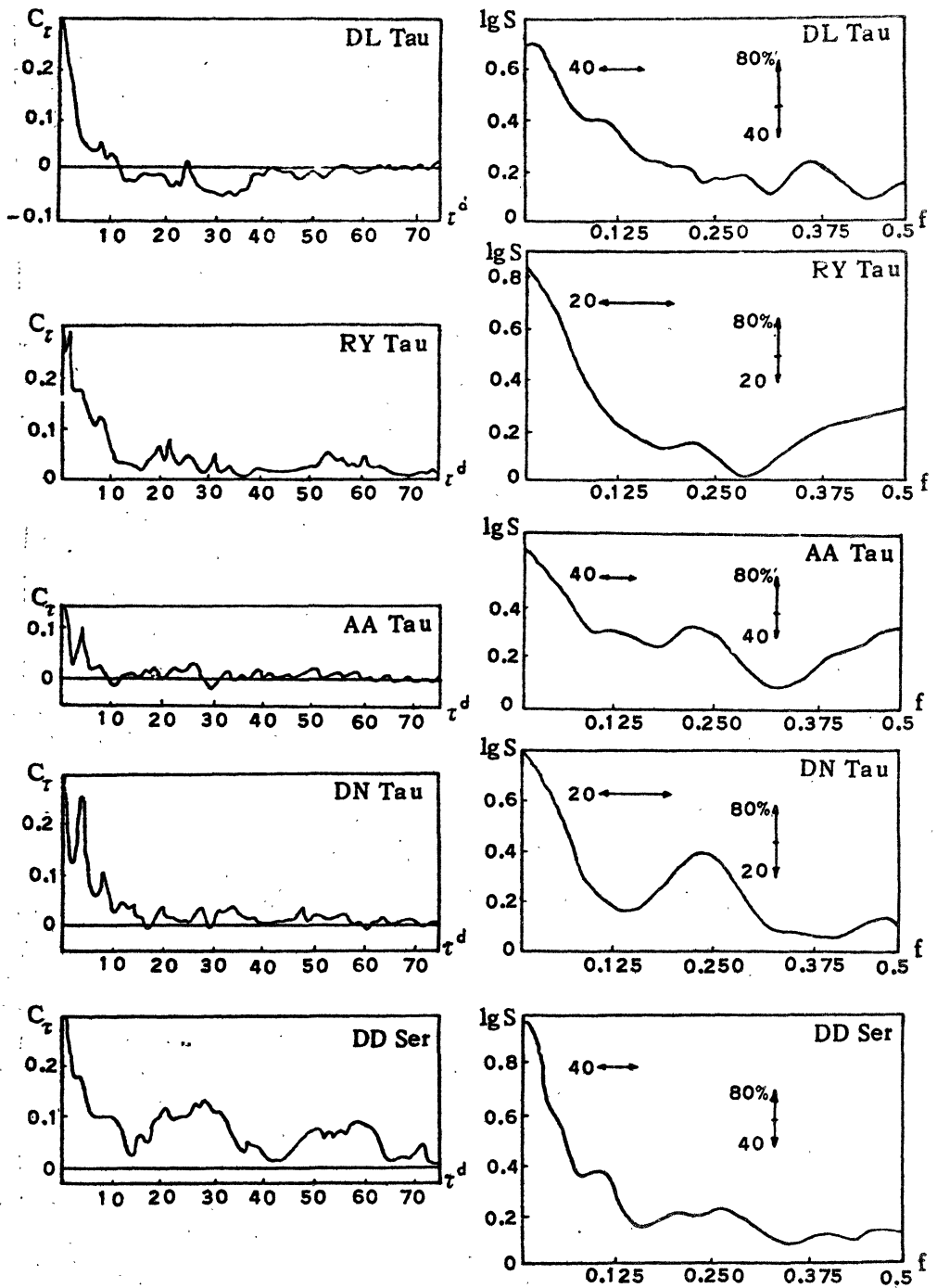


Рис. 2

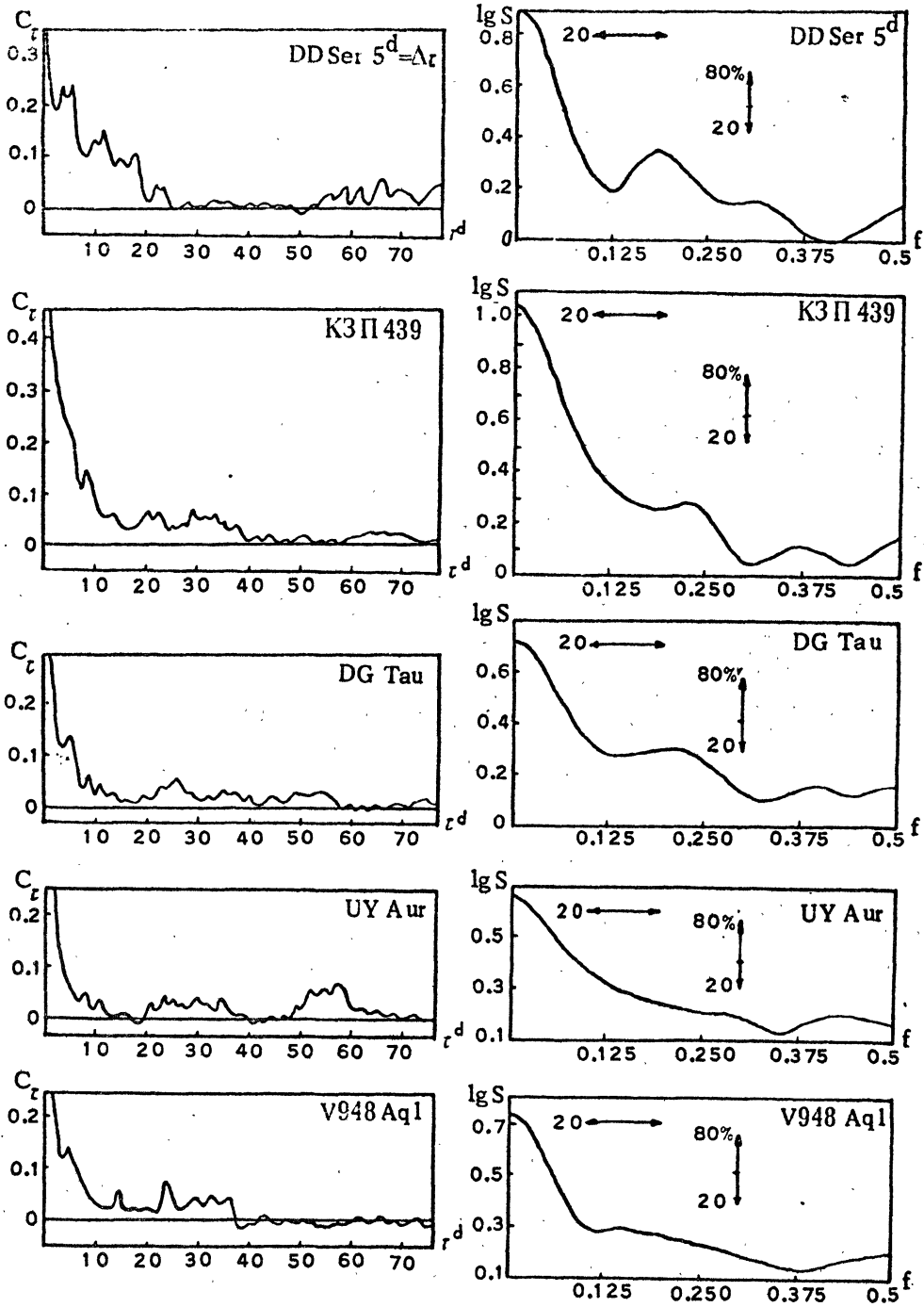


Рис. 3

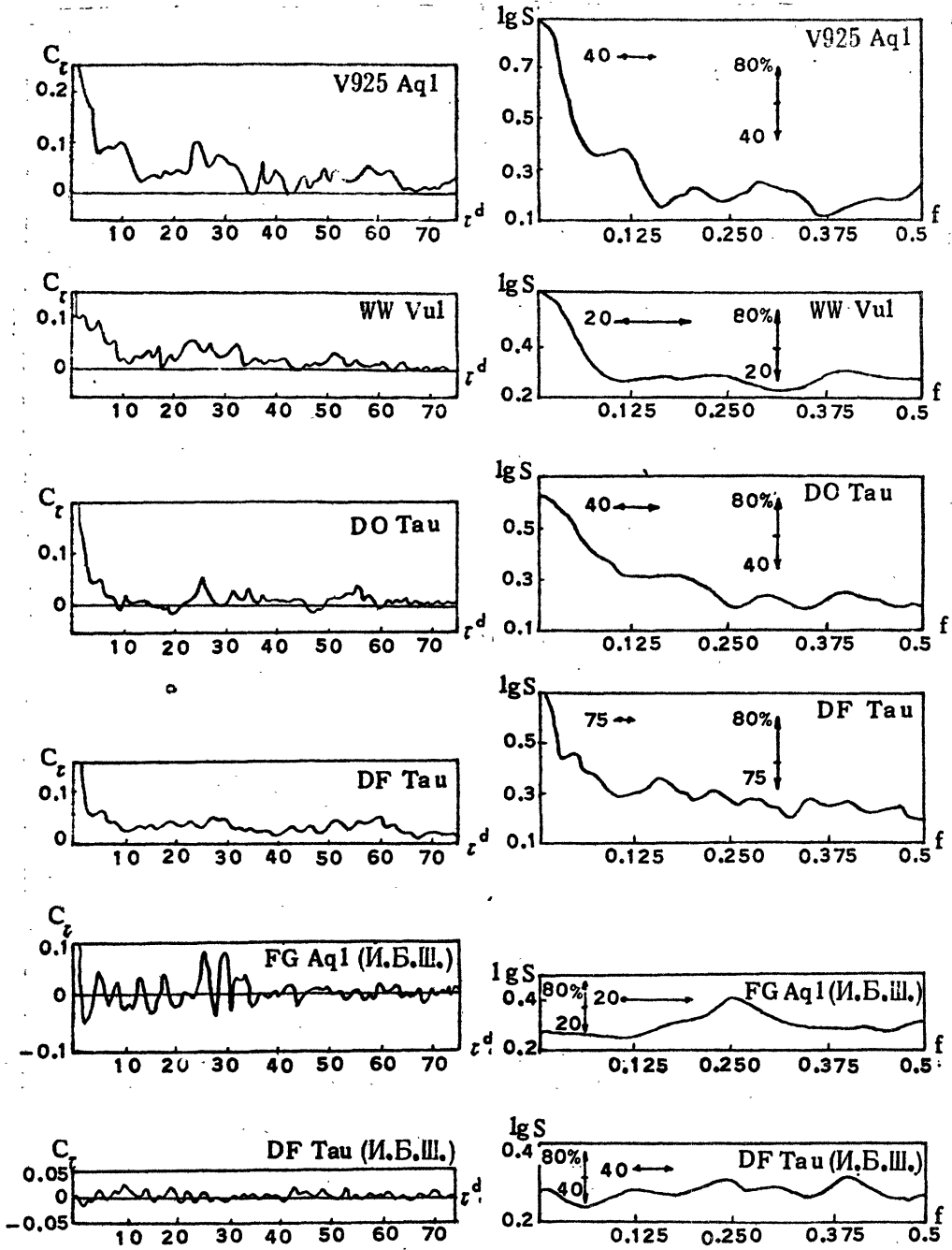


Рис. 4. И.Б.Ш. — имитация белым шумом.

Изменение частот осуществлялось в пределах $0 \div 0.5 d^{-1}$, в частности, $i(0) = 0$, $i(0.5) = 1$. Количество точек нормированной спектральной плотности $-S(f_i)$ для звезды FG Aq1 и ее имитации бралось в пределах от 1 до $\frac{N}{2} = 150$.

По оси абсцисс на рис. 5 отложены точки k . Рис. 5 показывает, что спектральная функция имитации FG Aq1 белым шумом (пунктирная линия) глубоко лежит внутри 95% доверительного интервала, в то время как спектральная функция FG Aq1 (сплошная линия) выходит за пределы 95% доверительного интервала. Таким образом, можно однозначно заключить, что изменение блеска звезд типа RW Aur не является белым шумом.

Авторы выражают благодарность Н. Е. Курочкину за обсуждение и полезные высказывания, Ю. С. Романову за оказанную помощь.

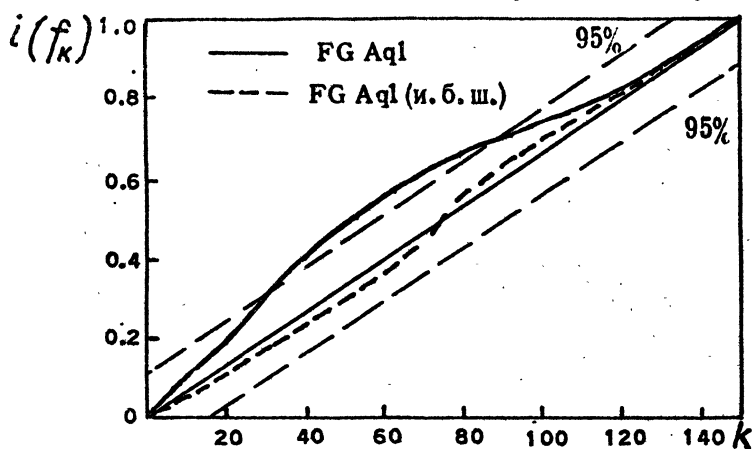


Рис. 5. И. Б. Ш. — имитация белым шумом.

Данная работа не могла бы быть выполнена без наблюдений звезд, проведенных В. П. Цесевичем и Б. А. Драгомирежкой, которые были любезно предоставлены, за что авторы выражают благодарность.

Литература:

- Дженкинс Г., Ваттс Д., 1971, "Спектральный анализ и его приложения", тт. 1, 2, "Мир", М.
 Курочкин Н. Е., 1963, ПЗ 14, 4.
 Лукацкая Ф. И., 1969, "Статистические исследования блеска неправильных и полуправильных переменных звезд, "Наукова думка", Киев.
 Макаренко Е. Н., 1968, ПЗ 16, 388.
 Макаренко Е. Н., 1969, ПЗ 17, 1.
 Плейжман, 1969 — P la g e m a n n S., in "Non-Periodic Phenomena in Variable Stars", IAU Coll. Budapest, 1, 21.
 Цесевич и др., 1973 — Цесевич В. П. и Драгомирежка Б. А., в кн. "Звезды типа RW Возничего", "Наукова думка", Киев.
 Шаерф, 1964 — S c h a e r f M. G., Stanford Univ. Tech. Rep., 12.

Одесская астрономическая
 обсерватория

Поступила в редакцию
 15 сентября 1974 г.
 Дополнена 10 мая 1975 г.