

Алгоритм и программа для ЭВМ решения кривой блеска затменной системы, содержащей компоненту с протяженной атмосферой

А. М. Черепашук, А. В. Гончарский, А. Г. Ягола

Описан новый метод решения кривой блеска затменной системы с протяженной атмосферой. Метод основан на совместном "решении" обоих минимумов кривой блеска. Основные модельные предположения: сферичность компонент и монотонность функций, описывающих распределение яркости и свойств поглощения по диску компоненты с протяженной атмосферой. Метод состоит в многократном решении интегральных уравнений, описывающих изменение блеска при затмениях в главном и вторичном минимумах. Полученные при этом функции распределения яркости и свойств поглощения связываются между собой условием нормировки суммарной светимости компонент. Это позволяет в случае, когда в системе выполняется условие $\cos i < r_p$, по минимуму $|O-C|$ определить как радиус спутника r_p и наклонение орбиты i , так и функции, описывающие фотометрическую структуру диска аномальной компоненты, независимо от физической природы этой компоненты. Приведен достаточный критерий выполнимости условия $\cos i < r_p$, не зависящий от конкретных значений параметров r_p, i . Этот критерий позволяет до решения кривой блеска доказать, что в исследуемой затменной системе выполняется условие $\cos i < r_p$. Приведена программа для ЭВМ на языке ФОРТРАН для решения кривой блеска новым методом.

The Algorithm and Computer Programme for Light Curve Solution of an Eclipsing Binary System Containing the Component with an Extended Atmosphere

by A. M. Cherepashchuk, A. V. Goncharsky, A. G. Jagola

A new method of a light curve solution for an eclipsing binary system with an extended atmosphere is described. The method is based on combined solution of both light curve minima. The principal model assumptions are: the sphericity of the components and monotony of the functions describing the distribution of brightness and absorption properties on the disk of the component with an extended atmosphere. The method is repeated solution of integral equations describing light variations during eclipses in the primary and the secondary minima. The obtained functions of distribution are connected to each other by normalization of summary lumino-

sity of the components. When the condition $\cos i < r_p$ is justified in the system, using minimum of $|O-C|$ one can obtain both the satellite radius r_p and the inclination of the orbit plane i and the functions, describing photometric structure of the peculiar component disk. This solution is independent on the nature of the component having an extended atmosphere. The criterion enough for the condition $\cos i < r_p$ is given. This criterion doesn't depend of the concrete parameter values r_p, i . The criterion permits to prove that this condition is true in eclipsing system under investigation before light curve solution. The computer programme in the FORTRAN for light curve solution by this new method is given.

Введение

В последнее время электронные вычислительные машины (ЭВМ) все шире применяются к решению задач определения фотометрических элементов затменных систем. Разработаны машинные варианты различных классических методов решения кривой блеска (Веллман, 1960; Хаффер и Коллинз, 1962; Григар, 1963; Юркевич, 1964; Кржиж, 1965; Горак, 1970; Харрис, 1967; Маудер, 1966; Китакура, 1967; Табачник, 1968; Купер, 1969; Линнел и Проктор, 1971; Лавров, 1971; Нэльсон и Дэвис, 1972). Во всех указанных работах потемнение к краю дисков компонент системы моделируется специальным законом, выводимым в первом приближении из теории тонких звездных атмосфер. Использование мощных ЭВМ позволило также определять параметры затменной системы звезд с тонкими фотосферами без предварительной ректификации кривой блеска (Хилл и Хатчингс, 1970; Вилсон и Дэвинэй, 1971; Вуд, 1971).

Во всех цитированных выше работах задача интерпретации кривой блеска сводится к переопределенной системе нелинейных алгебраических уравнений относительно конечного числа параметров (радиусов компонент, их сплюснутостей, коэффициентов потемнения и т.п.). Однако, среди более чем 4000 затменных систем встречаются системы, содержащие объекты, о физической природе которых известно мало; в большинстве случаев такие объекты обладают протяженными атмосферами. Как пример можно привести двойные с компонентами типа Вольфа-Райе, а также системы типа ζ Aur. Открытые в последнее время рентгеновские пульсары и гипотетические "черные дыры" в составе тесных двойных систем также могут иметь протяженные газовые оболочки, образующиеся при аккреции вещества (Сюняев и Шакура, 1972). В этих случаях, из-за недостатка модельной информации о компонентах системы, не представляется возможным свести задачу решения кривой блеска при затмении к замкнутой системе алгебраических уравнений. Между тем, определение параметров пекулярной компоненты из кривой блеска во всех указанных случаях представляет исключительный интерес. Поэтому необходимо рассмотреть задачу решения кривой блеска затменной системы при минимуме модельных предположений о ее компонентах, что было сделано ранее (Черепашук, 1971а).

Ограничимся рассмотрением систем с протяженными атмосферами, у которых эффекты отражения и эллипсоидальности малы и могут быть приближенно учтены классической ректификацией кривой блеска (примерами подобных систем могут служить V444 Cyg, CV Ser, CX Ser, ζ Aur, 31 и 32 Cyg и т.п.).

В настоящей статье мы рассмотрим, для определенности, частные затмения в полуклассической затменной системе (Черепашук, 1971 а), когда одна компонента — звезда с тонкой фотосферой и линейным законом потемнения, другая компонента — звезда с протяженной сферической фотосферой, свойства которой неизвестны и подлежат определению из кривой блеска. Соображения, изложенные в настоящей статье, легко можно применить и к случаю полного затмения в полуклассической затменной системе (Черепашук, 1971 а).

Отметим, что предположение о сферичности протяженной фотосферы вполне оправдано в случае разделенных двойных с компонентами типа Вольфа-Райе (V444 Cyg, CV Ser, CX Ser), поскольку большие скорости радиального расширения являются сильным изотропизирующим фактором, препятствующим значительной приливной деформации протяженной фотосферы даже за пределами внутренней критической полости Роша (Кастор, 1970).

Условимся называть, как это принято, фотосферой — зону формирования континуума, атмосферой — зону формирования линий. Очевидно, что звезда может иметь тонкую фотосферу и обладать протяженной атмосферой, но не наоборот. Можно считать также, что если звезда обладает протяженной фотосферой, то она заведомо обладает и протяженной атмосферой. Когда речь идет о решении кривой блеска в континууме, мы употребляем термин "протяженная фотосфера".

Из-за отсутствия в настоящее время удовлетворительной теории протяженных фотосфер мы (в отличие от случая классической затменной системы) не можем уверенно задать потемнение к краю компоненты с протяженной фотосферой (W-компоненты) в виде какого-либо специального закона. Не представляется возможным также задать априори и надежный закон распределения объемного коэффициента поглощения в протяженной фотосфере.

Как известно, потемнение к краю, описываемое законом Козырева-Чандрасекара (1934) для звезды с протяженной фотосферой, получено в предположении о независимости коэффициента поглощения от частоты, что, по-видимому, не имеет места. Поэтому таблицы фотометрических фаз Шульберга (1953) могут служить лишь для получения грубого решения кривой блеска затменной системы с протяженной фотосферой.

Между тем, если в случае классических затменных систем эффекты потемнения к краю являются "тонкими", т. е. малыми по сравнению с изменениями блеска, обусловленными затмениями, в случае полуклассических систем эффекты потемнения к краю и полупрозрачности про-

тяженной фотосферы являются определяющими. Поэтому в этом случае решение кривой блеска сильно зависит от принятой модели протяженной фотосферы.

Отметим также, что таблицы фотометрических фаз, вычисленные Линнеллем (1961) для атмосферного затмения, также предполагают, что коэффициент поглощения в протяженной фотосфере не зависит от частоты; кроме того, здесь предполагается степенная зависимость объемного коэффициента поглощения от расстояния до центра звезды, что заранее трудно обосновать. Из последних работ в этом направлении следует отметить очень интересную работу Пустыльника (1969), где также рассчитаны таблицы фотометрических фаз при атмосферном затмении и учтена зависимость коэффициента поглощения от частоты в предположении, что основной поглощающий агент — отрицательные ионы водорода (при этом принимается степенной закон распределения плотности в протяженной фотосфере). Таблицы Пустыльника можно использовать лишь для звезд спектральных классов F—K.

Все работы по решению кривых блеска затменных систем с протяженными фотосферами, основанные на моделировании структуры протяженной фотосферы (Крон и Гордон, 1950; Шульберг, 1953; Линнелль, 1961; Пустыльник, 1969), позволяют решать лишь один минимум кривой блеска и потому требуют предварительного знания части неизвестных (например, отношения светимостей компонент). Между тем, подобно тому как использование уравнения глубин сильно увеличивает надежность определения элементов классической затменной системы, в случае полуклассической системы также необходимо совместно решать оба минимума. Это позволит полнее извлекать информацию из кривой блеска*. Такое совместное решение обоих минимумов кривой блеска полуклассической затменной системы возможно, если отказаться от моделирования структуры диска W-компоненты и решать интегральные уравнения, описывающие потерю блеска в главном и вторичном минимумах (Черепашук, 1966; 1971 а). Впервые идея о необходимости решения интегрального уравнения при атмосферном затмении была высказана Копалом (1946) и Копалом и Шепли (1946). Решая лишь один ("атмосферный") минимум кривой блеска V444 Cyg, Копал и Шепли вынуждены были постулировать часть неизвестных (радиус спутника и наклонение орбиты).

Все изложенные соображения делают уместной следующую постановку задачи: попытаться определить из кривой блеска полуклассической системы как "геометрию" (радиус спутника r_p и наклонение орбиты i), так и функции, характеризующие фотометрическую структуру диска W-компоненты, без каких-либо специальных предположений о физической природе этой компоненты.

* В работе Пустыльника (1969) уравнение глубин учитывается приближенно.

Ранее было показано (Черепашук, 1966; 1971 а), что если в полуклассической затменной системе выполняется условие $\cos i < r_\rho$ и если компоненты сферичны, то поставленная задача имеет единственное решение. Точность этого решения определяется тем, насколько сильно неравенство $\cos i < r_\rho$ в данной конкретной системе; последнее должно выясниться при конкретном решении кривой блеска. Гипотеза $\cos i < r_\rho$ должна быть обоснована из дополнительных соображений. В работе Черепашука (1973) приведен достаточный критерий выполнимости условия $\cos i < r_\rho$ в полуклассической затменной системе, не зависящий от конкретных значений параметров r_ρ, i . Этот критерий формулируется следующим образом: если максимальная потеря блеска в минимуме, соответствующем случаю "спутник впереди W-компоненты", больше или равна половине относительной светимости L_W у W-компоненты, то в системе выполняется условие: $\cos i < r_\rho$. Величину L_W можно грубо оценить из спектральных наблюдений, сравнивая эквивалентные ширины линий в спектре звезды, находящейся в составе тесной двойной системы, с эквивалентными ширинами линий в спектре одиночной звезды того же спектрального класса. Оцененное таким образом грубое значение L_W используется лишь для обоснования гипотезы $\cos i < r_\rho$, но не для решения кривой блеска. Точное значение L_W определяется совместно со всеми другими элементами орбиты при решении кривой блеска новым методом (см. ниже).

Постановка задачи определения элементов затменной системы с протяженной фотосферой.

Рассмотрим, для определенности, затменную систему V444 Cyg (WN5 + O6), которая является типичной полуклассической системой с частными затмениями и незначительными эффектами близости компонент. Здесь компонента WN5 обладает протяженной фотосферой.

Как показано ранее (Черепашук, 1971 а), кривая блеска полуклассической затменной системы описывается следующими тремя уравнениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - I_1(\theta) = \int_0^{R_{\xi a}} K_1(\xi, \Delta, r_\rho) I_a^p(\xi) d\xi, \quad \cos i < \Delta < r_\rho + R_{\xi a}, \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - I_2(\theta) = \int_0^{R_{\xi c}} K_2(\xi, \Delta, r_\rho) I_c(\xi) d\xi \quad \cos i < \Delta < r_\rho + R_{\xi c}, \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1 - \int_0^{R_{\xi c}} I_c(\xi) 2\pi \xi d\xi}{\pi r_\rho^2 (1 - \frac{x}{3})} = \frac{\int_0^{r_0} I_a^p(\xi) 2\pi \xi d\xi}{\pi r_0^2} \end{array} \right. \quad (3)$$

Здесь интегральное уравнение (1) описывает минимум кривой блеска, соответствующий атмосферному затмению (главный минимум в случае

V444 Cyg), $1 - I_1(\theta)$ — потеря блеска, наблюдаемая в главном минимуме $I_\rho^0(\xi) = I_\rho^0 [1 - e^{-\tau(\xi)}]$ — искомая функция, описывающая свойства поглощения диска W-компоненты (I_ρ^0 — яркость в центре диска спутника — нормальной звезды, $\tau(\xi)$ — оптическая толщина на луче зрения при рассматривании диска W-компоненты "напросвет").

Интегральное уравнение (2) описывает минимум кривой блеска, соответствующий случаю "спутник — нормальная звезда впереди W-компоненты" (вторичный минимум в случае V444 Cyg); $I_c(\xi)$ — искомая функция, выражающая распределение яркости по диску W-компоненты. Здесь ξ — полярное расстояние на диске W-компоненты в долях радиуса орбиты, R_{ξ_0} — некоторый вспомогательный параметр, такой что полный радиус диска поглощения $r_{\xi_0} \leq R_{\xi_0}$; аналогично, полный радиус диска излучения $r_{\xi_c} \leq R_{\xi_c}$.

Величины r_{ξ_0} и r_{ξ_c} определяются точками пересечения функций $I_\rho^0(\xi)$ и $I_c(\xi)$ с нулем. Величины R_{ξ_0} и R_{ξ_c} можно оценить из условий внешнего касания дисков (задача решения кривой блеска полуклассической системы слабо чувствительна к изменению величин R_{ξ_0} и R_{ξ_c} , т.к. функции $I_\rho^0(\xi)$ и $I_c(\xi)$ на "краю" диска W-компоненты дают малый вклад в интеграл по области перекрытия дисков; в случае классических систем это не имеет места, и задача сильно чувствительна к изменению величины R_{ξ_c}).

Таким образом, условия внешнего касания дисков в нашем случае используются лишь для мажорирования значений полных радиусов, но не для определения величин этих радиусов. Практически лишь с этой целью условия внешнего касания дисков использовались нами и в прежних работах (Черепашук, 1966; Черепашук, Гончарский Ягола, 1967; 1968). Точные значения радиусов r_{ξ_0} и r_{ξ_c} определялись при этом пересечением найденных функций $I_\rho^0(\xi)$ и $I_c(\xi)$ с нулем. Такое определение полных радиусов r_{ξ_0} и r_{ξ_c} значительно надежнее и естественнее, чем по моментам внешнего касания дисков.

Следует отметить, что определение полных радиусов r_{ξ_0} и r_{ξ_c} по точкам пересечения функций $I_\rho^0(\xi)$ и $I_c(\xi)$ с нулем позволяет получить лишь минимальные значения полных радиусов W-компоненты. Реальные значения радиусов могут быть значительно больше в том смысле, что протяженная фотосфера может "тянуться" на значительно большие расстояния от центра W-компоненты, но эти внешние части могут не давать заметного вклада в наблюдаемую потерю блеска при затмении. При этом внешние части протяженной фотосферы способны делать заметный вклад в полную светимость W-компоненты, что необходимо учитывать, записывая условие нормировки суммарной светимости компонент в следующем виде: $L_W + L_0 + L_1 = 1$. Здесь $L_W = \int_0^{R_{\xi_c}} I_c(\xi) 2\pi \xi d\xi$ — часть светимости W-компоненты, дающая заметный вклад в потерю блеска при затмении ($I_c(\xi)$ определяется из уравнения (2)),

L_0 — светимость спутника — нормальной звезды, L_1 — светимость внешних частей протяженной фотосферы, которые не "чувствуются" при затмении. Параметр L_1 должен искажаться совместно со всеми другими параметрами задачи (радиусом спутника и др.). Подобная ситуация может встретиться при решении широкополосной кривой блеска V444 Cyg, где вклад эмиссионных линий может достигать 60% от полной светимости компоненты WN5 (Невский и Рублев, 1963), а наблюдения показывают, что оболочка WR, светящаяся в эмиссионных линиях, имеет большие размеры по сравнению с континуумом. При использовании узкополосных наблюдений V444 Cyg в континууме и при анализе систем с незначительным вкладом линий мы будем использовать классическое уравнение

$L_W + L_0 = 1$, полагая $L_1 = 0$ и считая, что $L_W = \int_0^{R_{\xi c}} I_c(\xi) 2\pi \xi d\xi$ есть полная светимость W-компоненты, где $I_c(\xi)$ определена из уравнения (2).

Чтобы избежать недоразумений, оговоримся, что полные значения радиусов W-компоненты $r_{\xi a}$ и $r_{\xi c}$, введенные выше, являются лишь фотометрическими характеристиками W-компоненты и, в отличие от случая звезды с тонкой фотосферой, несколько не характеризуют размеров тела W-компоненты, содержащего основную часть массы ("ядра" W-компоненты). Об определении размеров ядра по функциям $I_a^0(\xi)$ и $I_c(\xi)$ будет сказано ниже.

Заметим, что параметры $r_{\xi a}$, $r_{\xi c}$ и r_0 (радиус ядра) определяются при заданных функциях $I_a^0(\xi)$ и $I_c(\xi)$ и потому не являются независимыми. Независимыми искомыми параметрами в полуклассической затменной системе являются два параметра: r_ρ (радиус спутника — нормальной звезды) и i (наклонение орбиты).

Уравнение (3) выражает условие нормировки суммарной светимости компонент $L_W + L_0 = 1$, при наличии у W-компоненты абсолютно непрозрачного ядра радиусом r_0 ; x — коэффициент потемнения к краю диска спутника — нормальной звезды, который можно взять в соответствии со спектральным классом спутника (Григар, 1965). Следует отметить, что влияние x на решение в случае полуклассической затменной системы весьма слабо. Левая часть уравнения (3) определяется из вторичного минимума (в случае V444 Cyg) и представляет собой яркость в центре диска спутника — нормальной звезды при заданных параметрах r_ρ , i . Правая часть уравнения (3) есть среднее значение функции $I_a^0(\xi)$ (определяемой из главного минимума при тех же значениях r_ρ , i) в пределах непрозрачного ядра W-компоненты.

Вывод уравнения (3) чрезвычайно прост. Поскольку в случае непрозрачного ядра $r(\xi) = \infty$, искомая функция $I_a^0(\xi) \equiv I_0^0$ для всех $0 \leq \xi \leq r_0$; однако I_0^0 мы можем определить независимо при заданных r_ρ , i из другого минимума кривой блеска, используя условие нормировки:

$$L_W + L_0 = \int_0^{R_{\xi c}} I_c(\xi) 2\pi \xi d\xi + I_0^0 \pi r_\rho^2 \left(1 - \frac{x}{3}\right) = 1.$$

Интегрирование функции $I_c(\xi)$ можно проводить численно. Приравнявая величины I_ρ^0 , полученные в первом и во втором случаях, и заменяя тождество по ξ уравнением, содержащим среднее значение $I_\rho^0(\xi)$ для $0 \leq \xi \leq r_0$, получаем уравнение (3), которое аналогично уравнению глубин в классической теории затменных переменных.

Отметим, что для практического использования уравнения (3) с целью определения значений параметров r_ρ , i , необходимо, чтобы искомые функции $I_c(\xi)$ и $I_\rho^0(\xi)$ определялись из уравнений (1) и (2) на всем диске W-компоненты, т.е. для $0 \leq \xi \leq r_{\xi c}$ и $0 \leq \xi \leq r_{\xi c}$. Как показано ранее (Черепашук, 1966; 1971 а), это имеет место лишь в том случае, когда в затменной системе выполняется условие $\cos i < r_\rho$.

Радиус непрозрачного ядра r_0 определяется точкой выхода функции $I_\rho^0(\xi)$ на участок постоянного значения в окрестности $\xi = 0$. Следует заметить однако, что функция $I_\rho^0(\xi)$ в окрестности $\xi = 0$ (центральные части диска) определяется со значительной погрешностью. Поэтому определение r_0 по функции $I_\rho^0(\xi)$ таким способом не представляется надежным (о другом способе определения r_0 по функции $I_\rho^0(\xi)$ см. ниже). Можно однако использовать дополнительную информацию, вытекающую из функции $I_c(\xi)$, потребовав, чтобы ширина максимума этой функции равнялась πr_0 , где $\pi > 1$ — параметр, учитывающий тот факт, что радиус абсолютно непрозрачного ядра r_0 у W-компоненты должен быть меньше радиуса зоны ее диска, обязанной светящемуся ядру. Значение π не следует брать слишком малым, поскольку при этом есть опасность усреднить функцию $I_\rho^0(\xi)$ в области, размеры которой превышают размеры непрозрачного ядра. Можно использовать следующее уравнение для определения r_0 :

$$I_c(2r_0) = \frac{\int_0^{r_{\xi c}} I_c(\xi) 2\pi\xi d\xi}{\pi r_{\xi c}^2} = \frac{L_W}{\pi r_{\xi c}^2} \quad (4)$$

Согласно уравнению (4), $2r_0$ определяет точку на диске W-компоненты, где значение функции $I_c(\xi)$ равно средней поверхностной яркости диска этой компоненты. Рисунок 1 иллюстрирует сказанное. То обстоятельство, что мы усредняем значения функции $I_\rho^0(\xi)$ в области $0 \leq \xi \leq r_0$, делает уравнение (3) слабо чувствительным к погрешностям определения этой функции, вызванными погрешностями задания кривой блеска (эта чувствительность тем слабее, чем больше r_0). Отметим в связи с этим, что в случае очень малых r_0 уравнение (3) перестает "работать", т.к. становится сильно чувствительным к погрешностям задания кривой блеска. Более определенно и точно радиус непрозрачного ядра r_0 определяется уровнем в протяженной фотосфере, где оптическая глубина вдоль радиуса равна единице (Черепашук, 1966; 1972; Черепашук, Гончарский, Ягола, 1967); однако такое определение r_0 требует решения интегрального уравнения Абеля, поэтому его следует проводить

лишь для окончательно найденной функции $I_0^p(\xi)$ (при оптимальных значениях параметров r_p , i). Следует подчеркнуть однако, что неопределенность в значении r_0 слабо влияет на результат решения кривой блеска (важно только не брать r_0 слишком большим). Это связано с тем обстоятельством, что функция $I_0^p(\xi)$ в окрестности $\xi = 0$ должна быть квазипостоянной (с точностью до уклонений, вызванных погрешностями наблюдений). Поэтому использование уравнения (4) для определения r_0 дает вполне удовлетворительные результаты при определении элементов. Метод решения кривой блеска, не зависящий от выбора значения r_0 , изложен в Дополнении к настоящей статье (см. ниже).

Поскольку разные части уравнения (3) определяются из разных минимумов кривой блеска, это уравнение весьма чувствительно к изменению параметров r_p , i и позволяет установить надежную функциональную зависимость $r_p(i)$, т.е. исключить один искомый параметр (рис. 2).

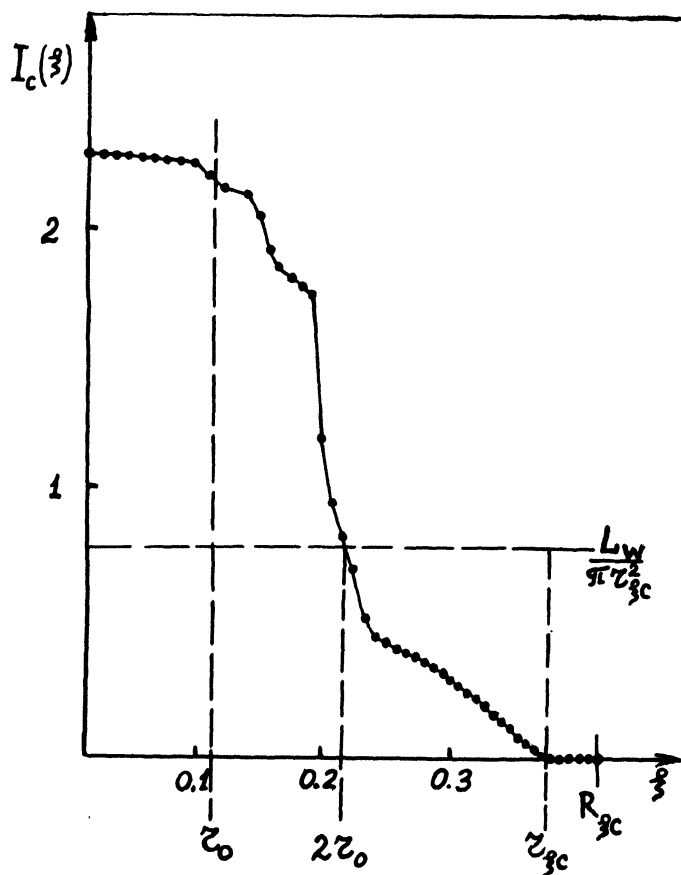


Рис. 1. Определение радиуса непрозрачного ядра r_0 с помощью уравнения (4) по функции $I_c(\xi)$, полученной в результате решения интегрального уравнения (2) с помощью программы П2 при $r_p = 0.20$, $i = 81^\circ$. Случай V444 Cyg; использовалась узкополосная ($\Delta\lambda_{\text{эфф}} = 165\text{\AA}$) кривая блеска в континууме $\lambda 7512\text{\AA}$.

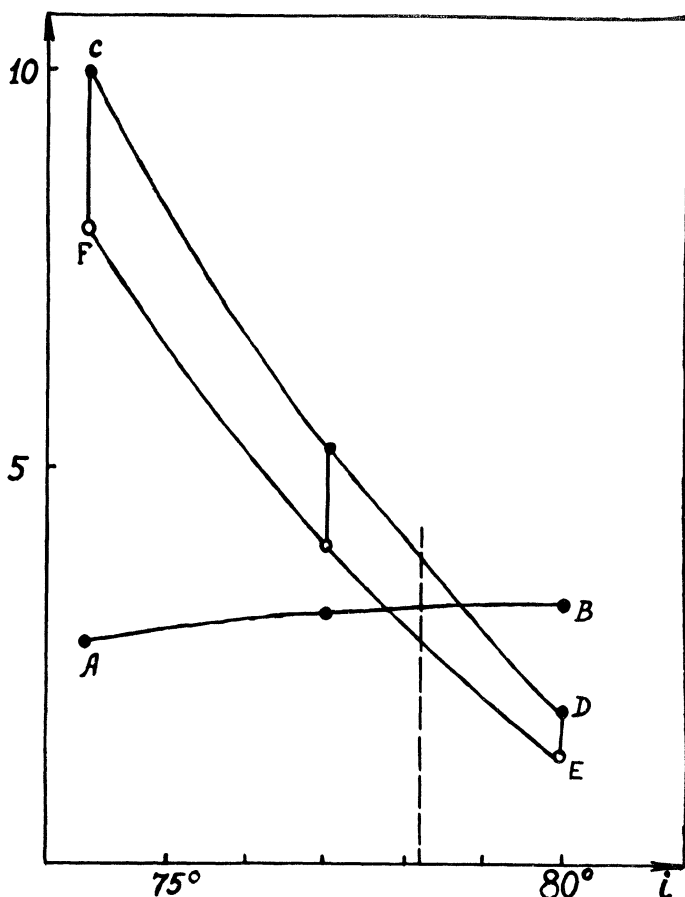


Рис. 2. Графическое решение уравнения (3) при $r_p = 0.30$. Случай V444 Cyg; $\lambda 4244\text{\AA}$, $\Delta\lambda_{\text{эфф}} = 75\text{\AA}$. Кривая AB изображает левую часть уравнения (3), которая получается из вторичного минимума. Полоса CDEF изображает правую часть уравнения (3), которая находится из главного минимума. Ширина полосы CDEF обусловлена погрешностью определения правой части уравнения (3) (погрешность задания кривой блеска составляет $\sim 3\%$ от глубины главного минимума). Как видно из рисунка, значению $r_p = 0.30$ соответствует $i = 78.2 \pm 0.5$.

В использовании уравнения (3), связывающего оба минимума кривой блеска, состоит главное отличие нового метода решения кривой блеска затменной системы с протяженной фотосферой (Черепашук, 1966; 1971 а) от методов, использовавшихся ранее (Крон и Гордон, 1950; Шулльберг, 1953 и др.).

Уравнение (3) представляет собой нелинейное алгебраическое уравнение относительно параметров r_p , i . Эти параметры входят в уравнение (3) неявно, посредством функций $I_c(\xi)$ и $I_p(\xi)$, которые зависят от r_p , i через посредство интегральных уравнений (1) и (2). Расстояние между

центрами дисков компонент Δ связано с углом θ относительного поворота компонент известным соотношением (для круговой орбиты):

$$\Delta = \sqrt{\cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \theta}.$$

Таким образом, главная процедура решения кривой блеска новым методом (Черепашук, 1971 а) состоит в многократном решении интегральных уравнений (1), (2) при различных значениях параметров r_p , i .

В нашей задаче, описываемой уравнениями (1) ÷ (3), имеются следующие независимые неизвестные: две функции $I_c(\xi)$ и $I_a^p(\xi)$ и два параметра r_p , i . Остальные неизвестные (r_{ξ_a} , r_{ξ_c} , r_0 , L_w , L_0) получаются из этих величин. Задавая конкретные значения r_p , i , получим из уравнений (1), (2) соответствующие функции $I_a^p(\xi, r_p, i)$ и $I_c(\xi, r_p, i)$. Для получения единственного решения необходимо иметь еще по крайней мере два дополнительных уравнения для определения значений r_p , i .

В случае, если в системе выполняется условие $\cos i > r_p$, как показано ранее (Черепашук, 1971 а), кривая блеска не позволяет написать дополнительные условия для выбора параметров r_p , i , и задача определения элементов имеет бесчисленное множество решений (под решением понимается совокупность r_p , i , $I_c(\xi)$, $I_a^p(\xi)$). Для получения решения при $\cos i > r_p$ необходимо из дополнительных соображений (не привлекая кривой блеска) постулировать часть неизвестных: либо функции $I_c(\xi)$ и $I_a^p(\xi)$, либо параметры r_p , i . Существенно, что при этом все решения будут равноправны в том смысле, что все они будут одинаково хорошо представлять кривую блеска. Надежность полученного таким образом решения будет целиком зависеть от принятых постулатов, которые в случае протяженных фотосфер не могут быть достаточно обоснованными.

Иная ситуация имеет место в случае, если в системе выполняется условие $\cos i < r_p$. В этом случае, как уже отмечалось, можно использовать уравнение (3) и получить зависимость $r_p(i)$. Кроме уравнения (3) необходимо иметь по крайней мере еще одно уравнение для определения значения $r_p(i)$, т.е. для определения единственного решения.

Возможность получения единственного решения в случае $\cos i < r_p$ связана с тем, что интегральные уравнения (1) и (2) при $\cos i < r_p$ имеют решение не при всяких значениях параметров r_p , i , поскольку центральные части диска W-компоненты при $\cos i < r_p$ в моменты затмений перекрываются диском спутника "дважды": диск спутника в момент соединения переходит своим краем через центр диска W-компоненты (рис. 3). Между тем, для отыскания решений интегральных уравнений (1), (2) при фиксированных r_p , i достаточно лишь тех частей кривой блеска, которые удовлетворяют следующим интервалам значений Δ : $r_p \leq \Delta \leq r_p + R_{\xi_a}$ для главного минимума и $r_p \leq \Delta \leq r_p + R_{\xi_c}$ для вторичного минимума, поскольку эти интервалы Δ соответствуют перекрытию всех зон диска W-компоненты для $0 \leq \xi \leq R_{\xi_a}$ и $0 \leq \xi \leq R_{\xi_c}$.

(см. рис. 3). Участки кривой блеска, отвечающие условию $r_\rho > \Delta \gg \cos i$, могут служить для независимого контроля выбранных значений параметров r_ρ, i (Черепашук, 1966; 1971 а), что и дает возможность получить единственное решение при $\cos i < r_\rho$.

В наших прежних работах (Черепашук, 1966; 1971а; Черепашук, Гончарский, Ягола, 1967) мы разбивали кривую блеска V444 Cyg

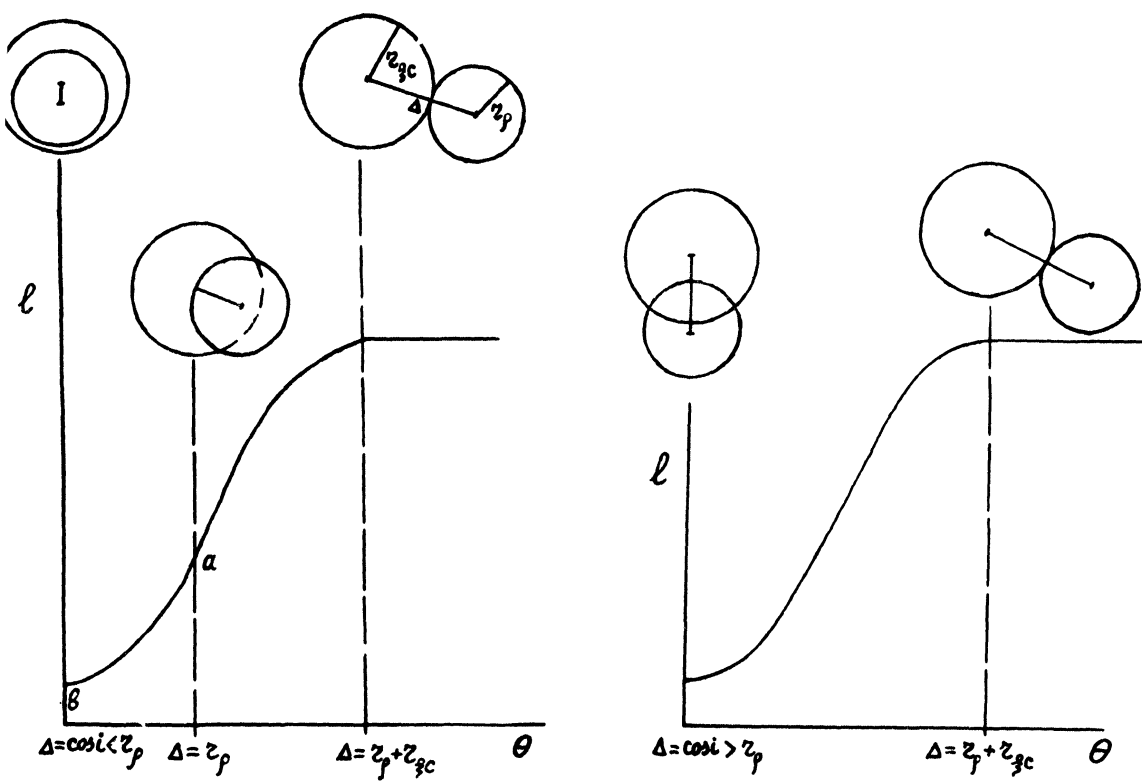


Рис. 3. Схема затмений при $\cos i < r_\rho$ (слева) и при $\cos i > r_\rho$ (справа). В случае $\cos i < r_\rho$ участок ab кривой блеска может служить для независимого контроля выбранных значений параметров r_ρ, i . Этот участок и обуславливает заметную зависимость $|O-C|$ от параметров r_ρ, i .

на две части точкой $\Delta = r_\rho$ и использовали "верхние" части минимумов кривой блеска для отыскания функций $I_c(\xi)$ и $I_\rho^p(\xi)$ при фиксированных значениях r_ρ, i , а "нижние" части — для проверки правильности принятых значений параметров r_ρ, i . Такая процедура казалась разумной с точки зрения изучения свойств задачи, которая решалась впервые. Однако для практической реализации нового метода разбиение кривой блеска на части представляется нецелесообразным, поскольку это значительно усложняет алгоритм. Кроме того, работы последних лет показали, что нелинейность потемнения к краю компонент системы сильнее всего сказывается на нижних частях минимума кривой блеска (Ван Вир, 1960; Григар, 1965; Киперман и Шульберг, 1969). Поэтому участки кривой блеска, соответствующие $\Delta < r_\rho$, в нашем случае целесообразно использовать не только для отыскания "геометрии" системы, но и для нахождения функций $I_c(\xi)$ и $I_\rho^p(\xi)$.

Реализация нового метода, не связанная с разбиением кривой блеска на части точкой $\Delta = r_\rho$, была предложена нами ранее (Черепашук, Гончарский, Ягола, 1968) и практически опробована на примере классической затменной системы YZ Cas. Суть ее состоит в следующем. Зафиксируем какие-либо значения параметров r_ρ, i и будем решать интегральные уравнения (1), (2), не разбивая кривую блеска на части. Если выбранные значения параметров r_ρ, i близки к истинным, то результирующая теоретическая кривая блеска будет отстоять от наблюдаемой кривой на расстоянии $|O-C|$, не превышающем δ -погрешности задания кривой блеска. Если же выбранные значения параметров r_ρ, i далеки от истинных, то в случае $\cos i < r_\rho$ решение уравнений (1), (2) даст $|O-C| > \delta$. Иными словами, в этом случае никакое изменение функций $I_c(\xi)$ и $I_\rho^p(\xi)$ не позволит описать наблюдаемую кривую блеска теоретической кривой с заданной точностью δ . Тот факт, что остаточные $|O-C| > \delta$, позволяет считать, что значения параметров r_ρ, i , использованные при решении интегральных уравнений (1) и (2), далеки от истинных. Меняя значения параметров r_ρ, i , мы можем по минимуму $|O-C|$ выбрать искомые значения этих параметров и связанные с ними посредством уравнений (1), (2) функции $I_\rho^p(\xi)$ и $I_c(\xi)$. Таким образом, возможна следующая схема решения кривой блеска полуклассической затменной системы новым методом.

1. Необходимо доказать, что в исследуемой затменной системе выполняется условие: $\cos i < r_\rho$. Пользуясь приведенным выше критерием, мы доказали, что в системе V444 Cyg условие $\cos i < r_\rho$ выполняется (Черепашук, 1973).

2. Выбираем сетку значений параметров r_ρ, i , например, полагаем для $r_\rho = 0.1$ значения $i = 80^\circ, 85^\circ, 90^\circ$ (в конкретной задаче могут оказаться физические ограничения, позволяющие сузить область варьирования параметров r_ρ, i); затем берем $r_\rho = 0.15$ и также полагаем $i = 75^\circ, 80^\circ, 85^\circ$ и т.д. Для каждой пары r_ρ, i из этой сетки значений решаем интегральные уравнения (1) и (2) (см. ниже) и получаем

$I_c^p(\xi, r_p, i)$, $I_c(\xi, r_p, i)$, $|O-C|_1$ и $|O-C|_2$ — в главном и вторичном минимумах. Если, скажем, мы взяли 5 значений r_p и 5 значений i , то нужно решить каждое из уравнений (1), (2) по 25 раз.

3. Каждую функцию $I_c(\xi, r_p, i)$ из полученного набора подставляем в уравнение (4) и определяем значения $r_0(r_p, i)$. Во всех случаях удобно интегрирование проводить численно, а решение алгебраических уравнений — графически.

4. С найденными $r_0(r_p, i)$, $I_c(\xi, r_p, i)$, $I_c^p(\xi, r_p, i)$ входим в уравнение (3), графическое решение которого позволит каждому значению r_p поставить в соответствие определенное значение i (см. рис. 2), т. е. r_p установить зависимость $r_p(i)$ и тем самым исключить один искомый параметр.

5. Строим зависимость $|O-C|_1$ от $r_p(i)$. Минимум $|O-C|_1$ определяет искомое значение $r_p(i)$, т. е. r_p и i . Решая интегральные уравнения (1) и (2) при этих значениях параметров r_p, i , определяем искомые функции $I_c^p(\xi)$ и $I_c(\xi)$.

6. Строим зависимость $|O-C|_2$ от $r_p(i)$. Минимум $|O-C|_2$ также определяет искомое значение $r_p(i)$, т. е. r_p и i , что служит дополнительным контролем решения. Отметим, что поскольку у затменной системы с протяженной атмосферой формы главного и вторичного минимумов иногда значительно различаются (например, у V444 Cyg главный минимум вдвое шире вторичного), величины $|O-C|_1$ и $|O-C|_2$ могут зависеть от $r_p(i)$ по-разному, однако минимумы $|O-C|_1$ и $|O-C|_2$ должны совпадать, если данная полуклассическая затменная система удовлетворительно описывается моделью двух шаровых звезд на круговой орбите. Рис. 4 поясняет сказанное.

Таким образом, несмотря на минимальное количество сделанных нами модельных предположений (сферичность компонент, выполнимость условия $\cos i < r_p$), мы имеем для определения двух искомых параметров r_p, i три независимых условия: уравнение (3), минимум $|O-C|_1$ и минимум $|O-C|_2$, т. е. задача определения элементов в нашей постановке допускает уверенное определение решения (параметров r_p, i и функций $I_c(\xi)$ и $I_c^p(\xi)$).

Заметим, что поскольку функции $I_c(\xi)$ и $I_c^p(\xi)$ получаются без каких-либо специальных предположений о физической природе W-компоненты, а также гарантируются однозначно одной лишь кривой блеска, то они могут быть использованы для независимого изучения свойств компоненты с протяженной фотосферой (W-компоненты).

О методах решения интегральных уравнений (1) и (2).

Как уже отмечалось выше, главная процедура решения кривой блеска полуклассической затменной системы новым методом состоит в многократном решении интегральных уравнений (1), (2). Поэтому для практической реализации всех идей, высказанных выше, необходимо иметь

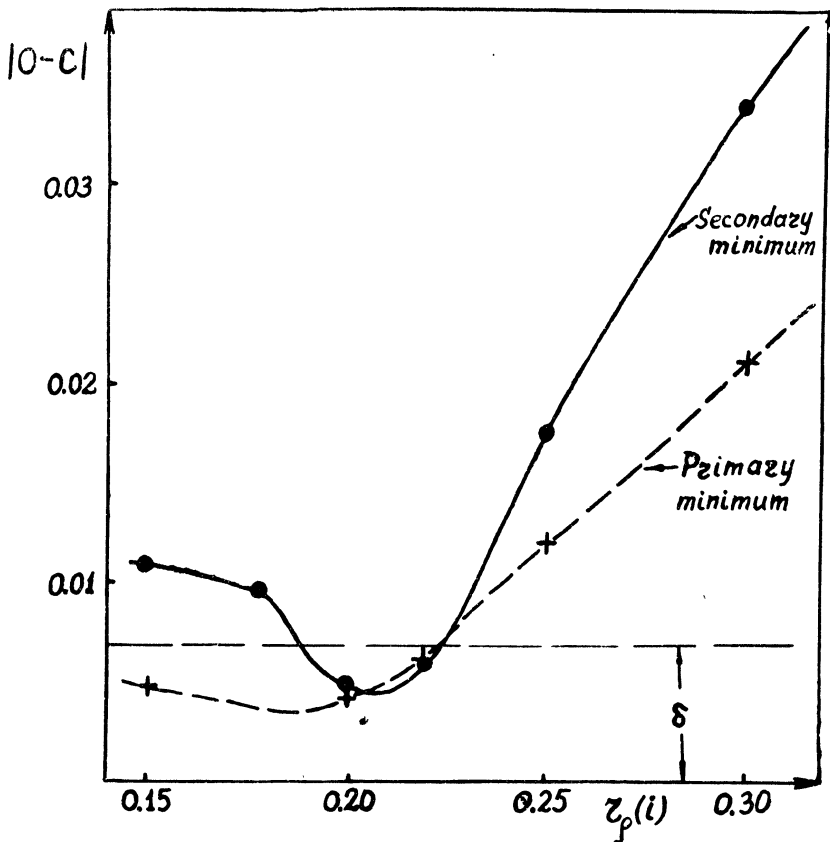


Рис. 4. Определение параметра $r_p(i)$ по минимуму $|O-C|$. С найденным $r_p(i)$ однозначно определяются $r_p, i, I_c(\xi), I_a^p(\xi)$. Случай V444 Cyg, $\lambda 4244 \text{ \AA}$, $\Delta\lambda_{\text{эфф.}} = 75 \text{ \AA}$.

эффективный метод решения этих уравнений. Такие эффективные методы решения уравнений типа (1), (2) стали возможными в последнее время в связи с фундаментальными работами академика Тихонова (1963а,б) и в связи с возможностью использования мощных ЭВМ.

Аналитические выражения для ядер $K_1(\xi, \Delta, r_p)$ и $K_2(\xi, \Delta, r_p)$ в уравнениях (1), (2) выведены нами ранее (Черепашук, 1971а):

$$K_1(\xi, \Delta, r_p) = \begin{cases} 2\xi(1-x) \arccos\left(\frac{\xi^2 + \Delta^2 - r_p^2}{2\xi\Delta}\right) + \frac{4x\xi\sqrt{\xi\Delta}}{r_p} \cdot E(\kappa) + \\ + x \frac{2\sqrt{\xi} r_p^2 - 2\sqrt{\xi} (\xi + \Delta)^2}{r_p \sqrt{\Delta}} \cdot K(\kappa); (\xi, \Delta) \in G_1 \\ 2\pi(1-x)\xi + \frac{4\xi}{r_p} x \sqrt{r_p^2 - (\xi - \Delta)^2} \cdot E(\mu), (\xi, \Delta) \in G_2 \\ 0, (\xi, \Delta) \in G_3 \\ 0, (\xi, \Delta) \in G_4 \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $\kappa = \sqrt{\frac{r_p^2 - (\xi - \Delta)^2}{4\xi\Delta}}$, $\mu = \sqrt{\frac{4\xi\Delta}{r_p^2 - (\xi - \Delta)^2}}$, x — коэффициент по-

темнения для спутника — нормальной звезды. Области $G_1 \div G_4$ изображены на рис. 5. $K(\kappa)$, $E(\kappa)$, $E(\mu)$ — полные эллиптические интегралы, которые могут быть вычислены с помощью следующих разложений в ряды (Градштейн и Рыжик, 1963):

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{2^2} k^2 - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2} k^4 - \dots - \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \right]^2 \cdot \frac{k^{2n}}{2n-1} - \dots \right\}, \quad (6)$$

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \cdot \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 k^4 + \dots + \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \right]^2 k^{2n} + \dots \right\}.$$

В разложениях (6) вместо k следует подставить κ или μ .

$$K_2(\xi, \Delta, r_p) = \begin{cases} 2\xi \arccos\left(\frac{\xi^2 + \Delta^2 - r_p^2}{2\xi\Delta}\right) & , (\xi, \Delta) \in G_1 \\ 2\pi\xi & , (\xi, \Delta) \in G_2 \\ 0 & , (\xi, \Delta) \in G_3 \\ 0 & , (\xi, \Delta) \in G_4 \end{cases} \quad (7)$$

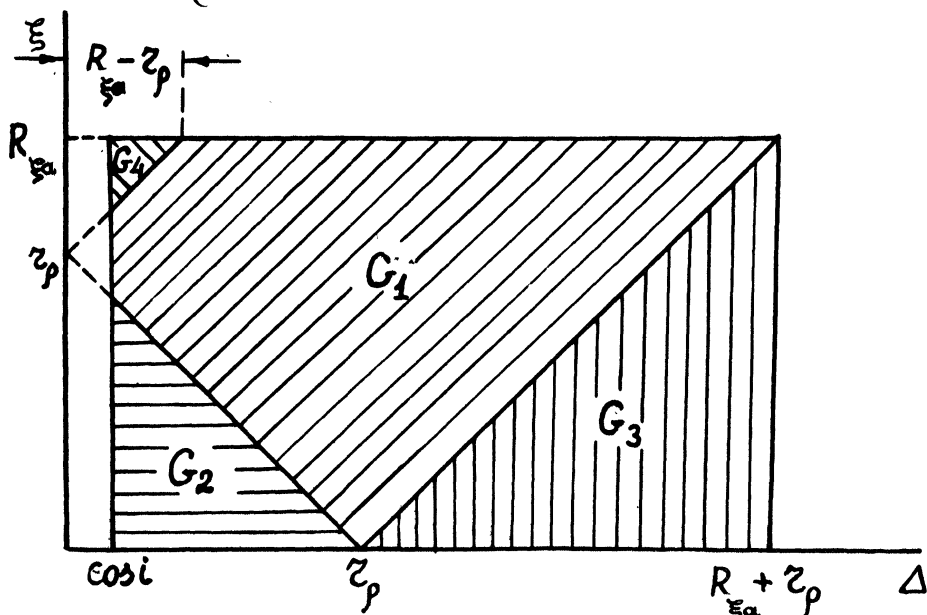


Рис. 5. Область определения ядер интегральных уравнений (1) и (2).

Ядро $K_2(\xi, \Delta, r_p)$ можно получить из ядра $K_1(\xi, \Delta, r_p)$, формально положив $x=0$. Области $G_1 \div G_4$ для ядра K_2 совпадают с соответствующими областями для ядра K_1 и также даны на рис. 5. Отметим, что эллиптический интеграл $K(\kappa)$ при $\xi = r_p - \Delta$ имеет особенность (обращается в бесконечность), однако эта особенность несущественна, т. к. коэффициент при $K(\kappa)$ в формуле (5) обращается в нуль при $\xi = r_p - \Delta$;

при расчетах можно полагать весь член, содержащий $K(\kappa)$, равным нулю для $\xi = r_p - \Delta$.

Уравнения (1), (2) являются интегральными уравнениями Фредгольма 1-го рода, которые, как известно, описывают некорректно поставленные задачи в смысле Адамара: малым возмущениям входных данных (функций $1 - 1_1(\theta)$ и $1 - 1_2(\theta)$) соответствуют сколь угодно большие возмущения решения (функций $I_c(\xi)$ и $I_p^0(\xi)$). Поэтому решение этих уравнений обычными методами может дать результат, сколь угодно сильно отличающийся от точного решения.

Академик А. Н. Тихонов разработал общую теорию решения некорректно поставленных задач (Тихонов, 1963а, б). Им также был предложен конкретный регуляризирующий алгоритм решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода, который был использован нами ранее (Черепашук, Гончарский, Ягола, 1967, 1972; Черепашук, 1971а, б).

При решении некорректно поставленной задачи целесообразно использовать всю дополнительную физическую информацию о решении. Это позволяет сузить множество функций, среди которых ищется решение, а значит уменьшить погрешность приближенного решения. Но такой подход требует разработки специальных алгоритмов поиска решения некорректно поставленной задачи в рамках общей теории регуляризации Тихонова (1963а, б).

В классической методике решения кривых блеска затменных переменных дополнительная информация о решении вытекает из теории тонких звездных фотосфер и состоит в том, что для потемнения к краю дисков компонент имеется специальный аналитический закон (например, линейный закон потемнения), зависящий от трех параметров: коэффициента потемнения, центральной яркости и радиуса. Использование этого специального закона потемнения делает задачу интерпретации кривой блеска корректной, поэтому здесь возможно применение любых алгоритмов поиска решения, и никаких проблем, связанных с некорректностью, не возникает.

В случае протяженных фотосфер, как уже отмечалось, нет удовлетворительной теории, поэтому необходимо рассмотреть решение интегральных уравнений (1), (2) при более общих ограничениях на искомые функции $I_p^0(\xi)$ и $I_c(\xi)$, чем это делается в классической теории затменных переменных. Такие физические ограничения не должны быть слишком специальными и должны слабо зависеть от физической модели компоненты с протяженной фотосферой из-за отсутствия удовлетворительной физической теории. В то же время физических ограничений должно быть достаточно для того, чтобы сделать задачу решения интегральных уравнений (1), (2) корректной в классическом смысле. Такие физические ограничения на функции $I_c(\xi)$ и $I_p^0(\xi)$ в случае затменных переменных имеются: эти функции с хорошим приближением можно считать монотонными (Черепашук, Гончарский, Ягола, 1968). Класс монотонных функций включает в себя как част-

ный случай и линейный закон потемнения, так что новая методика решения кривых блеска затменных переменных является естественным обобщением классической методики на случай протяженных фотосфер.

Отметим, что Копал (1946) и Копал и Шепли (1946) предложили свой метод решения интегрального уравнения типа (1) при $x=0$. Сама по себе идея о необходимости решения интегрального уравнения при интерпретации кривой блеска затменной системы представляется весьма перспективной. Новая методика решения кривых блеска (Черепашук, 1971a) является в сущности обобщением идеи Копала на случай совместного решения обоих минимумов и $x \geq 0$. Однако метод решения интегрального уравнения для потери блеска, предложенный Копалом (1946) и Копалом и Шепли (1946), нельзя признать удовлетворительным. Устойчивое решение здесь получается в конце концов за счет замены интеграла суммой небольшого числа членов. При этом возникает другая трудность: насколько точно полученное решение аппроксимирует точное решение задачи? Чтобы ответить на этот вопрос, желательно аппроксимировать интеграл в интегральном уравнении. Однако чем точнее в методе Копала аппроксимировать этот интеграл, тем сильнее будет сказываться некорректность (решение будет все сильнее и сильнее нерегулярно осциллировать), поскольку в основу метода Копала не положен какой-либо физический принцип выбора решения, и устойчивость решения связана лишь с "загрублением" оператора (заменой интеграла суммой небольшого числа членов). При решении некорректно поставленной задачи необходимо накладывать физические ограничения на искомое решение, которые должны быть известны априори, до решения задачи.

Ранее нами были предложены алгоритмы поиска решения интегральных уравнений (1) и (2) в классе монотонных ограниченных функций (Черепашук, Гончарский, Ягола, 1968). Как показано Гончарским и Яголой (1969), задача решения уравнений (1) и (2) в такой постановке является корректной: точность приближенного решения в этом случае определяется лишь точностью задания входных данных (функций $1 - I_1(\theta)$ и $1 - I_2(\theta)$). Однако эти алгоритмы страдали тем недостатком, что требовали значительных затрат машинного времени даже на весьма мощных ЭВМ. Поскольку новый метод предполагает многократное решение интегральных уравнений (1) и (2) при различных значениях r, i , необходимо свести к минимуму затраты машинного времени на решение уравнений.

Эффективные алгоритмы решения некорректно поставленной задачи в классе монотонных ограниченных функций разработаны в последнее время (Гончарский, Леонов, Гущина, Ягола, 1972). Здесь мы приведем один вариант направленного поиска решения уравнений (1) и (2) в классе монотонных ограниченных функций.

Алгоритм приближенного решения интегральных уравнений (1), (2).

Для решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода (каковыми являются уравнения (1), (2)) был рассмотрен ряд методов, основан

ных на градиентных методах минимизации выпуклых* дифференцируемых функционалов на выпуклых множествах** гильбертова пространства. Эти методы подробно описаны ранее (Гончарский, Леонов, Гущина, Ягола, 1972).

Приведем пример программной реализации метода, основанного на варианте Демьянова метода условного градиента (Будак и Васильев, 1969). Запишем каждое из уравнений (1), (2) в символическом виде:

$$A[x, z(s)] = \int_a^b K(x, s) z(s) ds = u(x), \quad c < x < d, \quad (8)$$

где мы положили:

$$\begin{aligned} u(x) &= 1 - I_{1,2}(\theta); \quad K(x, s) = K_{1,2}(\xi, \Delta, r_\rho); \\ z(s) &= I_c(\xi) \text{ или } I_o^p(\xi); \quad x = \Delta; \quad s = \xi; \\ b &= R_{\xi_a} \quad \text{или } R_{\xi_o}; \quad a = 0. \end{aligned}$$

Предположим, что точное решение $\bar{z}(s)$ уравнения (8) — произвольная монотонная (невозрастающая) функция, ограниченная сверху и снизу некоторыми константами C_1 и C_2 . Поскольку функции $I_c(\xi)$ и $I_o^p(\xi)$ должны быть неотрицательными, целесообразно C_1 полагать равной нулю. Как показано в работе Гончарского и др. (1972), решение некорректной задачи (8) на множестве монотонных функций, ограниченных константами C_1 и C_2 , эквивалентно минимизации функционала

$$\Phi[z(s), u(x)] = \left\{ \int_c^d \left[\int_a^b K(x, s) z(s) ds - u(x) \right]^2 dx \right\} \quad (9)$$

на множестве этих функций. Функционал (9) есть расстояние в метрике пространства L_2 теоретической кривой блеска от наблюдаемой кривой и имеет смысл суммы квадратов отклонений теоретической кривой блеска от наблюдаемой, т.е. имеет смысл $\Sigma(O-C)^2$.

Для нахождения искомой функции $z(s)$ необходимо ввести конечно-разностные сетки по x :

$$c = x_1, x_2, \dots, x_n = d$$

и по s :

$$a = s_1, s_2, \dots, s_m = b,$$

— а также аппроксимировать интегралы (скажем, по формуле трапеций) интегральными суммами. Любая монотонная функция, ограниченная константами C_1 и C_2 , будет при этом аппроксимироваться m -мерным вектором, компоненты которого удовлетворяют следующему условию:

* Функционал $\Phi[x(s)]$ называется выпуклым, если для $x_1(s)$ и $x_2(s)$
 $\Phi\left[\frac{x_1(s) + x_2(s)}{2}\right] \leq \frac{1}{2} \Phi[x_1(s)] + \frac{1}{2} \Phi[x_2(s)].$

** Множество H называется выпуклым, если из $x_1 \in H$ и $x_2 \in H$ следует, что $x_\lambda = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$ принадлежит H , где $0 < \lambda < 1$.

$$C_2 \geq z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_m \geq C_1.$$

Тогда, как показано в работе Гончарского и др. (1972), отыскание приближенного решения уравнения (8) на множестве монотонных ограниченных функций приводит к задаче выпуклого программирования для минимизации функционала (9) (Зуховицкий и Авдеева, 1964).

Сделаем несколько предварительных замечаний:

1. Очевидно, что множество монотонных функций, ограниченных сверху и снизу константами C_1 и C_2 , выпукло.
2. $\Phi[z(s), u(x)]$ — выпуклый функционал.
3. Если A имеет сопряженный оператор A^+ , то легко находится градиент функционала (9) по $z(s)$.

$$\begin{aligned} \Phi'_z[z(s), u(x)] &= 2(A^+Az - A^+u) = \\ &= 2 \int_a^b \int_c^d K(x, s) K(x, \eta) z(\eta) d\eta dx - 2 \int_c^d K(x, s) u(x) dx = \Phi'_z(s). \end{aligned} \quad (10)$$

Обозначим через Z множество монотонных невозрастающих функций, ограниченных константами C_1 и C_2 .

Алгоритм отыскания приближенного решения $z(s) \in Z$, основанный на варианте Демьянова метода условного градиента, состоит в следующем: требуется построить последовательность $z^{(n)}(s)$, минимизирующую дифференцируемый выпуклый функционал $\Phi[z(s), u(x)]$ на замкнутом выпуклом ограниченном множестве Z гильбертова пространства L_2 . Искомая последовательность $\{z^{(n)}\} \in Z$ для минимизации $\Phi[z, u]$ на Z строится совместно с некоторой вспомогательной последовательностью $\{\bar{z}^{(n)}\} \in Z$. Начальное приближение — функция $z^{(1)} \in Z$ — выбирается произвольно (см. ниже), после чего строится функция $\bar{z}^{(1)}$, исходя из следующего условия:

$$(\Phi'_z[z^{(n)}, u], \bar{z}^{(n)}) = \min_{z \in Z} (\Phi'_z[z^{(n)}, u], z) = \min_{z \in Z} \int_a^b \Phi'_z(s) z(s) ds \quad \text{при } n=1. \quad (11)$$

Затем находится $z^{(2)}$ по формуле:

$$z^{(n+1)} = z^{(n)} + \alpha_n (\bar{z}^{(n)} - z^{(n)}), \quad 0 \leq \alpha_n \leq 1 \quad \text{при } n=1 \text{ и т.д.} \quad (12)$$

Числа α_n в варианте Демьянова выбираются из условия:

$$\Phi[z^{(n+1)}, u] = \Phi[z^{(n)} + \alpha_n (\bar{z}^{(n)} - z^{(n)}), u] = \min_{\alpha \in [0, 1]} \Phi[z^{(n)} + \alpha (\bar{z}^{(n)} - z^{(n)}), u]. \quad (13)$$

При этих предположениях доказано (Будак и Васильев, 1969), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi[z^{(n)}, u] = \min_{z \in Z} \Phi[z, u],$$

т.е. таким способом получается последовательность монотонных ограниченных функций, минимизирующая функционал (9), или $\Sigma(O-C)^2$. Сделав достаточное большое число итераций, получим искомое приближение к точному решению уравнения (8). Остановить процесс счета можно в том случае, когда

$$\Phi[z(s), u(x)] \leq \delta^2,$$

где δ — погрешность задания кривой блеска. Однако по этому критерию мы можем проводить выбор приближенного решения лишь в том случае,

если искомые параметры r_ρ , i , при которых решаются уравнения (1), (2), близки к истинным. В случае, когда эти параметры далеки от истинных и в случае $\cos i < r_\rho$, предельное значение функционала (9) может быть больше δ^2 (это и r_ρ позволяет, как отмечалось выше, определить также и значения параметров r_ρ , i). Поэтому в последнем случае выбор искомого приближения к функциям $I_c(\xi)$ и $I_\rho^p(\xi)$ следует делать, не привлекая δ , а останавливать процесс счета в тот момент, когда относительное изменение функционала (9) будет достаточно мало, например, меньше 1% (рис. 6). Это означает, что мы достигли практически минимума функционала (9), и дальнейшее увеличение числа итераций не уменьшит существенно величины $\Sigma(O-C)^2$.

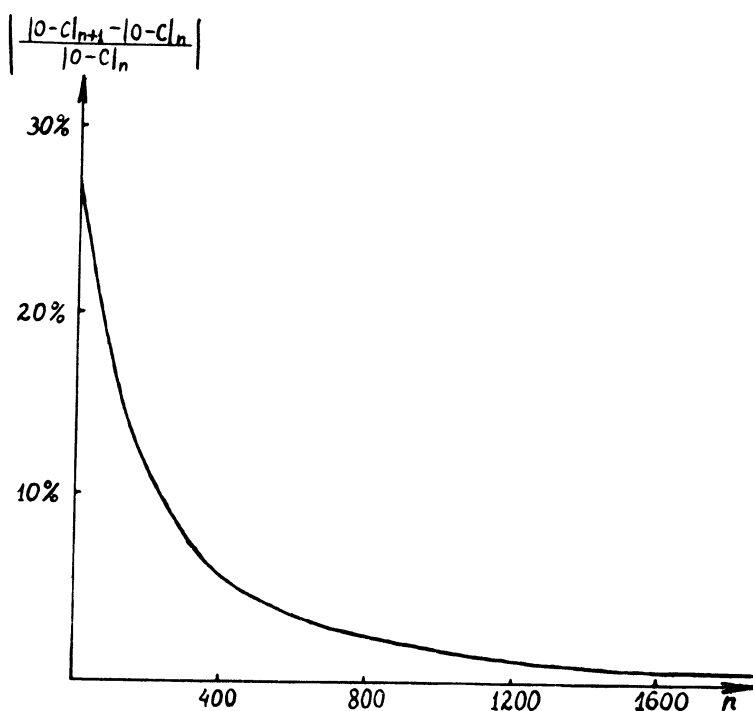


Рис. 6. Зависимость относительного изменения $|O-C|$ при решении интегрального уравнения (2) от числа итераций n . Абсолютное значение $|O-C|$ уменьшается в конце счета в 52 раза по сравнению с начальным значением $|O-C|$. Случай V444 Cyg, $\lambda 4244$, $\Delta\lambda_{\text{эфф.}} = 75 \text{ \AA}$. Время счета ~ 15 минут на ЭВМ БЭСМ-6.

Таким образом, из условия минимума $\Sigma(O-C)^2$ при заданных r_p, i мы определяем функции $I_c(\xi)$ и $I_p^0(\xi)$; требуя же, чтобы этот минимум $\Sigma(O-C)^2 \leq \delta^2$, мы определяем значения искомых параметров r_p, i и соответствующие им искомые функции $I_c(\xi)$ и $I_p^0(\xi)$.

После перехода к конечноразностной аппроксимации легко видеть, что множество векторов $\bar{z}$, компоненты каждого из которых удовлетворяют условию $C_2 > z_1 > z_2 > \dots > z_m > C_1$, представляет собой многогранник с вершинами:

$$\begin{aligned} & (C_1, C_1, C_1, \dots, C_1) \\ & (C_2, C_1, C_1, \dots, C_1) \\ & (C_2, C_2, C_1, \dots, C_1) \\ & \dots\dots\dots \\ & (C_2, C_2, C_2, \dots, C_2) \end{aligned} \quad (14)$$

Так как линейный ограниченный функционал

$$(\Phi'_z[z^{(n)}(s), u(x)], z(s)) = \int_a^b \Phi'_z(s) z(s) ds \quad (15)$$

в формуле (11) достигает своей точной нижней грани на границе Z (Гончарский и др., 1972; Болтянский, 1969), то следовательно, решение задачи (11) (отыскание $\bar{z}^{(n)}$ по минимуму функционала (15)) сводится к простому перебору вершин многогранника (14) (очевидно, необходимо "перепробовать" $m+1$ вершину, где m — число точек по s). С другой стороны, решение задачи (13) сводится к отысканию минимума квадратичного трехчлена относительно α на отрезке $[0, 1]$, что также решается весьма просто. Мы не будем выписывать здесь явные выражения для коэффициентов этого трехчлена, которые легко получить, подставив в формулу (9) вместо z выражение (12).

Таким образом, схема поиска искомого решения $z(s)$ следующая. Берем каждый из векторов (14) и подставляем в выражение (11), куда вместо $z^{(n)}$ подставлено начальное приближение $z^{(1)}$. Тот вектор из (14), который реализует минимум функционала (11), используем как $\bar{z}^{(1)}$ и подставляем $z^{(1)}$ и $\bar{z}^{(1)}$ в выражение (13), минимум которого определяет значение искомого параметра α_1 . С этим значением α_1 и с векторами $z^{(1)}$ и $\bar{z}^{(1)}$ входим в формулу (12) и определяем $z^{(2)}$ — следующее приближение к искомому вектору $z(s_i)$. С вектором $z^{(2)}$ входим в формулу (11) и опять, перебирая все вектора из (14), останавливаемся на том векторе, который реализует минимум функционала (11). Этот вектор рассматриваем как $\bar{z}^{(2)}$ и, входя с ним в выражение (13), определяем α_2 . С этим значением α_2 и с векторами $z^{(2)}$ и $\bar{z}^{(2)}$ входим в формулу (12) и находим $z^{(3)}$ — следующее приближение к точному решению задачи (8) и т. д.

Изложенный процесс можно проиллюстрировать рисунком 7. Здесь в качестве многогранника (14) взят треугольник ABC (искомая функция ищется в виде таблицы из двух чисел). Любая монотонная ограниченная

функция, принадлежащая Z , условно изображается точкой внутри этого треугольника. Точка $z^{(1)}$ изображает начальное приближение. Поиск минимума функционала (11) сводится к перебору вершин треугольника ABC . Допустим, что мы остановились на вершине B . Соединяем эту вершину с точкой $z^{(1)}$ отрезком и вдоль этого отрезка ищем минимум функционала (13). Допустим, что этот минимум реализуется в точке $z^{(2)}$. С этой точкой $z^{(2)}$ проделываем те же операции, что и с точкой $z^{(1)}$, получим точку $z^{(3)}$ и т.д.

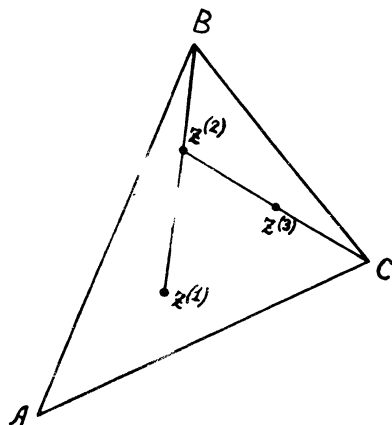


Рис. 7. Схематическое изображение процесса поиска решения интегральных уравнений (1), (2). Треугольник ABC изображает многогранник (14). $z^{(1)}$ — начальное приближение, $z^{(2)}$ — первое приближение, $z^{(3)}$ — второе приближение и т.д.

Программы на языке ФОРТРАН для решения интегральных уравнений (1), (2) в классе монотонных ограниченных функций

Приводимые ниже программы реализуют описанный выше метод решения уравнений (1), (2), основанный на варианте Демьянова метода условного градиента. Эти программы использовались для решения узкополосных кривых блеска V444 Cyg в континууме (Черепашук, 1972). Программы составлены на языке ФОРТРАН для ЭВМ БЭСМ-6 Вычислительного Центра Московского Университета. Программы для решения уравнений (1), (2) несколько различаются. Различие связано в основном с выбором начального приближения и с различием в выражениях для ядер $K_1(\xi, \Delta, r_p)$ и $K_2(\xi, \Delta, r_p)$ — см. формулы (5), (7). В дальнейшем будем называть программу решения уравнения (1) — программой П1, а программу решения уравнения (2) — программой П2.

Опишем важнейшие, необходимые пользователю идентификаторы, использовавшиеся в программах, общие для программ П1 и П2.

X и S — вектора сеток по Δ и ξ с числом точек N и M соответственно. Сетка по Δ пересчитывается при заданном i с сетки по θ (идентификатор P) по известной формуле:

$$\Delta = \sqrt{\cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \theta}$$

сетка по θ вводится в МОЗУ ЭВМ по оператору

READ— 350, (P (I), I=1, N),

которому соответствует оператор FØRMAT с номером 350. Сетка по θ может быть неравномерной, т.е. можно вводить наблюдаемые точки кривой блеска. Целые числа N и M задаются пользователем с помощью оператора присваивания*. Сетка по ξ в программе предусматривается равномерной с числом точек, равным M (при желании выбор сетки по ξ может быть изменен пользователем). A — матрица ядра $K_1(\xi_i, \Delta_j, r_p)$ или $K_2(\xi_i, \Delta_j, r_p)$. U — вектор левых частей уравнений (1), (2), т.е. вектор значений $1 - 1_1(\theta_i)$ или $1 - 1_2(\theta_i)$, снятых с кривой блеска. Вектор U вводится в МОЗУ ЭВМ по оператору

READ— 353, (U (I), I=1, N),

которому соответствует оператор FØRMAT с номером 353. Z — вектор функции минимизирующей последовательности $z^{(n)}(s)$ и приближенного решения (функции $I_c(\xi)$ или $I_p^0(\xi)$). AZ — вектор теоретической кривой блеска, т.е. вектор $A[x, z^{(n)}(s)]$. DIF — вектор поточечной воспроизводимости кривой блеска (разность между теоретической и наблюдаемой кривыми блеска в каждой точке). DELTA — погрешность δ^2 (среднеквадратичная, т.е. в метрике пространства L_2 , погрешность задания кривой блеска), задается пользователем с помощью оператора присваивания. C1 и C2 — константы, ограничивающие решение сверху и снизу. C1 всегда целесообразно брать равной нулю, C2 задается пользователем с помощью оператора присваивания (см. ниже). IN — счетчик итераций. Промежуточные выдачи на печать в данном варианте программы производятся через каждые 20 итераций в результате сравнения содержимого IN с константой 20 (при желании значение этой константы можно изменять). FZN — среднеквадратичное отклонение теоретической кривой блеска от наблюдаемой кривой, т.е. $\Sigma(O-C)^2$. Программа прекращает работу при условии $FZN \leq DELTA$. Если принятые значения параметров r_p, i далеки от истинных, то, как отмечалось выше, останов работы программы следует делать не по критерию δ^2 , а с пульта ЭВМ, по выполнении достаточно большого числа итераций. Как показала практика работы с программой для достижения минимума $\Sigma(O-C)^2$, достаточно осуществить $400 \div 1000$ итераций, что соответствует $5 \div 10$ минутам счета на ЭВМ БЭСМ-6 (10^6 операций в секунду). AI — угол наклона орбиты i в градусах и долях градусов, задается пользователем с помощью оператора присваивания. RR — параметр R_{ξ_c} или R_{ξ_a} , мажорирующий полный радиус компоненты с протяженной фотосферой r_{ξ_c} или r_{ξ_a} , задается пользователем с помощью оператора присваивания. RS — радиус r_p нормальной компоненты (с тонкой фотосферой), задается пользователем с помощью оператора присваивания.

* Об основах программирования на языке ФОРТРАН можно прочесть в книге Мак-Кракена и Дорна (1969).

Следующие идентификаторы непосредственно пользователю знать не обязательно, однако в Целях более полного описания программы, мы их опишем. ZT — вектор функции вспомогательной последовательности $\bar{z}^{(n)}(s)$ (имеет размерность вектора решения $z(s)$). AZT — вектор $A[x, \bar{z}^{(n)}(s)]$ (A — интегральный оператор в формуле (8)), имеет ту же размерность, что и вектор AZ . ATU — вектор $A^+[s, u(x)]$ (A^+ — оператор, сопряженный с A в формуле (10)), имеет ту же размерность, что и вектор s . GR — вектор $A^+[s, A[x, \bar{z}^{(n)}(s)]] - A^+[s, u(x)]$ в формуле (10), имеет ту же размерность, что и вектор s .

В программах П1 и П2 интегрирование производится по формуле трапеций.

Описание программы П2

Программа П2 предназначена для решения интегрального уравнения (2) (случай "спутник — нормальная звезда впереди W -компоненты") при фиксированных значениях параметров r_ρ, i .

Оператор **DIMENSION** задает размерность всех векторов и матриц, о которых говорилось выше (в данном конкретном варианте программы используется 50 точек по θ и 50 точек по ξ , т.е. использовано 50 точек кривой блеска, а функция $I_c(\xi)$ ищется в виде таблицы из 50 чисел). Перевод сетки по θ в сетку по Δ осуществляется участком программы, начинающимся с оператора **DØ — 351 — I = 1, N** и кончается оператором **351 — CØNTINUE**. Часть программы с оператора **DØ — 65 — J = 1, M** по оператор **65 — CØNTINUE** реализует вычисление матрицы ядра $K_2(\xi, \Delta, r_\rho)$ по формулам (7). Часть программы с оператора **K = M — 1 Ø Z (M) = -1** по оператор **501 — CØNTINUE** осуществляет способом наименьших квадратов поиск линейного закона потемнения

$$I_c^{(1)}(\xi) = I_{c0}^{(1)} (1 - x_1 + x_1 \sqrt{1 - \xi^2/R_{\xi c}^2}),$$

наилучшим образом представляющего при заданных $R_{\xi c}, i$ наблюдаемую кривую блеска. Этот линейный закон потемнения используется в дальнейшем как начальное приближение $z^{(1)}(s)$ при поиске истинного закона потемнения $I_c(\xi)$. В программе предусмотрено обрезание отрицательных значений начального приближения, которые могут появиться, когда оптимальное значение $x_1 > 1$. Поскольку ограничивающая константа $C_1 = 0$ и начальное приближение неотрицательно, искомая функция $I_c(\xi)$ всегда неотрицательна, т.е. программа, помимо условия монотонности, автоматически использует также априорную физическую информацию о неотрицательности решения.

При решении уравнения (2) нет надежных сведений о величине верхней ограничивающей константы C_2 , поэтому значение последней следует подбирать экспериментально (скорость сходимости весьма слабо зависит от величины константы C_2). Следует подчеркнуть, что в центре диска (при $\xi = 0$) значение искомой функции $I_c(\xi)$ (так же как и функции $I_\rho(\xi)$) определяется со значительной погрешностью: $I_c(0)$ может принимать сколь угодно большие значения, поскольку во-первых, это не противоречит условию монотонности $I_c(\xi)$ и, во-вторых, светимость

Центральных частей диска относительно мала, следовательно их влияние на кривую блеска слабо. Таким образом, в одной точке функции $I_c(\xi)$ ($\xi=0$) некорректность остается, и ее необходимо устранить, выбирая оптимальное значение ограничивающей константы C_2 . Например, при решении кривой блеска V444 Cyg, мы положили $C_2=100$ (максимальное значение функции $I_c(\xi)$ при этом не превышало 30 для всего диапазона изменения параметров r_p, i). В точках $\xi>0$ некорректность "побеждается" условием монотонности, и погрешности определения функций $I_c(\xi)$ и $I_p^0(\xi)$ конечны и однозначно связаны с погрешностью задания кривой блеска δ . Именно с целью устранения некорректности в точке $\xi=0$, мы проводим в уравнении (3) усреднение значений функции $I_p^0(\xi)$ в области $0 \leq \xi \leq r_0$. Отметим, что некорректность в точке $\xi=0$ слабо влияет на результат определения элементов орбиты r_p, i, L_w, L_0 и на значения функций $I_c(\xi)$ и $I_p^0(\xi)$ в остальных частях диска, поскольку светимость центральных частей диска относительно мала.

Цикл поиска приближенного решения начинается с оператора, имеющего метку 13. SVET — светимость L_w компоненты с протяженной фотосферой; находится интегрированием функции $I_c(\xi)$ по всему светящемуся диску по формуле трапеций. Вычисление светимости L_w проводится участком программы, начиная с оператора $K=M-1 \diamond SVET=0$ по оператор FFORMAT с номером 602,

Программа П2 имеет следующие выдачи на печать. В начале выдачи печатаются слова **MONOTONOUS FUNCTION**, после которых следует выдача на печать сетки по θ . Затем печатается слово **SIETKA**, за которым следует печать сетки по Δ . Непосредственно после сетки по Δ печатаются два числа: первое (слева) — Центральная яркость $I_{c0}^{(1)}$ в линейном законе потемнения (начальном приближении), второе число — произведение $I_{c0}^{(1)} \cdot x_1$. Далее печатаются слова **INITIAL APPROXIMATION**, за которым следует таблица значений начального приближения. Затем печатаются слова **EXPERIMENTAL CURV**, за которыми следует таблица значений $1-1_2(\theta)$ — наблюдаемых потерь блеска. Далее печатается идентификатор **FZI**, затем выдается число — расстояние (в метрике L_2) начальной кривой блеска (полученной с начальным приближением $I^{(1)}(\xi)$) от наблюдаемой кривой. Затем печатаются слова **INITIAL CURVE**, за которыми следует таблица потерь блеска, вычисленных с функцией $I^{(1)}(\xi)$ — начальным приближением. Затем печатается слово **DIFFERENCE** и следует таблица $O-C$ — поточечных разностей теоретической кривой блеска от наблюдаемой. Затем печатается слово **SVIETIMOST** и выдается значение светимости L_w . Затем печатаются четыре числа (слева направо): шаг по a , принятое значение δ^2 , затем $|O-C|_{L_2}$ (два раза) — расстояние в метрике L_2 теоретической кривой блеска от наблюдаемой. Далее следует слово **APPROXIMATION**, за которым печатается таблица значений искомого приближения к функции $I_c(\xi)$. Затем печатаются слова **THEORETICAL CURV**, за которыми выдается таблица теоретических значений потерь блеска (при заданном приближении к искомой функции $I_c(\xi)$). Далее, через каждые 20 итераций

печатаются последовательно слова **DIFFERENCE, SVIETIMØST, THEØRETICAL CURV, APPROXIMATION** и т.д., за которыми следуют соответствующие таблицы значений этих величин. Пример решения интегрального уравнения (2) с помощью программы П2 см. на рис. 1.

Описание программы П1

Программа П1 предназначена для решения интегрального уравнения (1) (атмосферное затмение) при фиксированных значениях параметров r_p, i . Роль оператора **DIMENSION** такая же, как и в программе П2. Перевод сетки по θ в сетку по Δ осуществляется тем же участком программы, что и в случае программы П2.

Часть программы с оператора **AX=.3** по оператор **65_CØNTINUE** реализует вычисление матрицы ядра $K_1(\xi_1, \Delta_1, r_p)$ по формулам (5). Здесь идентификатор **AX** обозначает x — коэффициент потемнения к краю диска спутника — нормальной звезды и задается пользователем с помощью оператора присваивания (в данном конкретном случае выбрано $x = 0.3$). При вычислении эллиптических интегралов E и K в формулах (5) использованы стандартные программы вычисления эллиптических интегралов I и II рода (**ELLICK** и **ELLICE** соответственно), которые имеются в библиотеке стандартных программ ЭВМ БЭСМ-6 Вычислительного Центра Московского Университета. При отсутствии подобных стандартных программ следует запрограммировать вычисление эллиптических интегралов по формулам (6).

Участок программы с оператора **DØ_204_I=1, M** по оператор **204_Z(I)=C2*(1.-S(I)/RR)** вычисляет начальное приближение, которое выбрано в виде отрезка прямой. Параметры этой прямой выбираются из условий: $I_0^p(0) = C_2$, $I_0^p(R_{\xi_0}) = 0$. Поскольку значения начального приближения на участке $0 \leq \xi \leq R_{\xi_0}$ неотрицательны и поскольку $C_1 = 0$, программа, помимо условия монотонности, автоматически использует априорную физическую информацию о неотрицательности искомой функции $I_0^p(\xi)$. При решении уравнения (1) значение ограничивающей константы C_2 может быть оценено путем использования уравнения (3); величину C_2 следует брать в несколько раз больше, чем значение левой части уравнения (3) (как уже отмечалось, решение уравнений (1) и (2) слабо зависит от величины C_2).

Цикл поиска приближенного решения начинается с оператора, имеющего метку 13.

Программа П1 имеет те же выдачи на печать, что и программа П2. Единственное отличие: в программе П1 нет выдачи **SVIETIMØST**.

Отметим, что в случае ЭВМ БЭСМ-6 Вычислительного Центра Московского Университета ввод и запуск программы П2 осуществляется с помощью перфокарты *** NAME_ЧЕРЕПАШУК** (каждый пользователь указывает свою фамилию). Ввод и запуск программы П1 осуществляется двумя перфокартами:

```
* NAME_ЧЕРЕПАШУК
* ASSIGN_LIBRARY_1
```


Вторая перфокарта реализует обращение к библиотеке стандартных программ, которая используется при вычислении эллиптических интегралов.

Массивы чисел следуют непосредственно за перфокартами, на которых набита программа, после перфокарты *EXECUTE в той последовательности, как это отражено в программе: сначала идет массив θ_j , затем — массив $1 - 1(\theta_j)$. Углы θ_j задаются в градусах и долях градусов.

Для других ЭВМ указанные операторы ввода и обращения к библиотеке стандартных программ могут быть иными. С этими оговорками можно считать, что программы П1 и П2 могут непосредственно использоваться в любой ЭВМ, имеющей транслятор с языка ФОРТРАН.

Необходимо помнить, что пробивку перфокарт с числовыми массивами следует проводить в том формате, который указан в программе (при желании, этот формат можно менять). Например, если за оператором READ 350, (P(I), I=1, N) следует оператор 350 FORMAT (4E7.0), то это означает, что массив P(I) вводится в ЭВМ, причем числа должны быть записаны пользователем по четыре на каждой строке (каждая строка — перфокарта), а на каждое число отведено семь позиций, включая десятичную точку. В таком формате число 2.36, например, запишется в следующем виде: `_____ 2.36`.

Заключение

Описанные выше программы П1 и П2 позволяют за 5 ÷ 10 минут машинного времени ЭВМ БЭСМ-6 получить решение интегральных уравнений (1), (2) при фиксированных значениях параметров r_p, i . Далее поиск значений этих параметров следует проводить методом, описанным выше, в части, посвященной постановке задачи определения элементов. Опыт использования программ П1 и П2 показал, что за 2 ÷ 3 часа машинного времени ЭВМ БЭСМ-6 может быть найдено полное решение задачи (функции $I_c(\xi)$ и $I_p^0(\xi)$ и параметров r_p, i). Полученные таким образом функции $I_c(\xi)$ и $I_p^0(\xi)$ можно использовать для изучения структуры протяженной фотосферы, независимо от физической природы аномальной компоненты (Черепашук, 1966; 1971а, б; 1972; Черепашук, Гончарский, Ягола, 1967; Черепашук и Халиуллин, 1972). В частности, функция $r(\xi)$, полученная из функции $I_p^0(\xi) = I_p^0[1 - e^{-r(\xi)}]$, определяет интегральное уравнение Абеля, решение которого дает зависимость объемного коэффициента поглощения в протяженной фотосфере от расстояния до центра W-компоненты. Интегрирование этой зависимости вдоль радиуса дает оптическую глубину; уровень в протяженной фотосфере, на котором оптическая глубина равна единице, определяет радиус ядра аномальной компоненты, т.е. радиус тела этой звезды, содержащего основную часть массы. Использование функций $I_c(\xi)$ для разных длин волн позволяет определить спектрофотометрическую температуру любой части диска аномальной компоненты (при заданном распределении энергии в спектре спутника — нормальной звезды). Все эти физические характеристики позволяют сделать определенные выводы о природе аномальной компоненты (Черепашук, 1972; Черепашук и Халиуллин, 1972).

Следует отметить, что разработанный нами метод после небольшой модификации может применяться и к решению кривых затмения в линиях (Черепашук, 1971б, Черепашук, Гончарский, Ягола, 1972).

Отметим, что приведенные выше программы П1 и П2 могут использоваться не только для решения кривых блеска затменных систем, но и для решения других некорректно поставленных задач в тех случаях, когда априори известно, что точное решение задачи — монотонная функция. Для этого достаточно лишь заменить часть программы, реализующую вычисление ядер K_1 и K_2 . К числу некорректных задач относятся такие задачи, как задача исправления спектральных наблюдений за инструментальный контур, задача исправления радиоастрономических наблюдений за диаграмму направленности антенны и др. Во всех подобных случаях, если известно, что точное решение есть монотонная функция, возможно применение программ П1 и П2.

Дополнение

Изложенный метод решения кривой блеска затменной системы с протяженной фотосферой предполагает многократное решение интегральных уравнений (1), (2) с использованием уравнения (3), связывающего оба минимума кривой блеска. Однако использование уравнения (3) в явном виде сопряжено с некоторыми (не принципиальными) трудностями: требуется каждый раз определять параметр r_0 из уравнения (4); кроме того, правая часть уравнения (3) определяется с некоторой погрешностью, зависящей (правда, достаточно слабо) от погрешности определения функции $I_a^p(\xi)$ из уравнения (1).

Можно избавиться от этих трудностей, если ввести уравнение (3) в интегральное уравнение (1), наложив на функцию $I_a^p(\xi)$ дополнительное ограничение, вытекающее из уравнения (3). Для этого необходимо потребовать, чтобы искомая функция $I_a^p(\xi)$ была не только монотонной и неотрицательной, но чтобы

$$I_a^p(0) = \frac{1 - \int_0^{R_{\xi c}} I_c(\xi) 2\pi \xi d\xi}{\pi r_p^2 \left(1 - \frac{x}{3}\right)} \quad (16)$$

В таком случае зависимость от r_p , i величин $\Sigma(O-C)_1^2$ и $\Sigma(O-C)_2^2$, полученных при решении интегральных уравнений (1), (2), будет сильно различаться, поэтому параметры r_p , i можно выбирать просто по минимумам $\Sigma(O-C)_1^2$ и $\Sigma(O-C)_2^2$. Естественно, как это следует из вышеизложенного, заметная зависимость $\Sigma(O-C)_1^2$ и $\Sigma(O-C)_2^2$ от параметров r_p , i будет иметь место лишь в том случае, если в исследуемой затменной системе выполняется условие $\cos i < r_p$.

В случае нашей программы П1 эту идею можно частично реализовать, положив верхнюю ограничивающую константу C_2 равной:

$$C_2 = \frac{1 - \int_0^{R_{\xi c}} I_c(\xi) 2\pi \xi d\xi}{\pi r_p^2 \left(1 - \frac{x}{3}\right)} \quad (17)$$

Выбор искоемых значений параметров r_p, i в этом случае также можно проводить, используя различную зависимость величин $\Sigma(O-C)_1^2$ и $\Sigma(O-C)_2^2$ от r_p, i и привлекая уравнение (3) лишь в тех случаях, когда левая часть этого уравнения больше правой.

В такой постановке задачи определения элементов отпадает необходимость определения параметра r_0 из уравнения (4), и метод является прямым в полном смысле этого слова: решение ищется только по минимуму $|O-C|$.

Схема решения кривой блеска в этом случае следующая.

1. Фиксируем параметры r_p, i и решаем интегральное уравнение (2), определяем функцию $I_c(\xi, r_p, i)$ и соответствующее ей значение $|O-C|_2$ с помощью программы П2.

2. Эту найденную функцию $I_c(\xi)$ подставляем в выражение (17) и вводим полученное значение ограничивающей константы C_2 в программу П1. С помощью этой программы П1 решаем интегральное уравнение (1) при тех же значениях параметров r_p, i , получаем функцию $I_a^p(\xi, r_p, i)$ и соответствующее ей значение $|O-C|_1$.

Повторяя изложенную процедуру для набора значений параметров r_p, i , получаем зависимости $\Sigma(O-C)_1^2$ и $\Sigma(O-C)_2^2$ от r_p, i и по ним определяем искоемые значения параметров r_p, i , а следовательно, и искоемые функции $I_c(\xi)$ и $I_a^p(\xi)$.

Отметим, что в этом случае при решении интегрального уравнения (1) некорректность в точке $\xi=0$ полностью устраняется, поскольку значение ограничивающей константы C_2 каждый раз определяется однозначно.

Литература:

- Болтянский В. Г., 1969, Математические методы оптимального управления, "Наука", М.
 Будаков Б. М., Васильев Ф. П., 1969, Приближенные методы решения задач оптимального управления, М., Ротапринт ВЦ МГУ.
 Ван Вир, 1960 — Van't Veer F., Rech. Astron. Obs. Utrecht 14, № 3.
 Веллман, 1960 — Wellman P., Bergedorf Mitt. № 111, 174.
 Вилсон и Дэвиннэй, 1971 — Wilson R. E., Devinney E. J., ApJ 166, 605.
 Вуд, 1971 — Wood D. V., AJ 76, 701.
 Гончарский А. В., Ягола А. Г., 1969, Докл. АН СССР 184, 771.
 Гончарский А. В., Гушина Л. Г., Леонов А. С., Ягола А. Г., 1972, Журн. Вычисл. Матем. и Матем. Физ. 12, 283.
 Горак, 1970 — Horak T. V., AJ 75, 1116.
 Градштейн И. С., Рыжик И. М., 1963, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, стр. 918.
 Григар, 1963 — Grygar J., Bull. Astr. Inst. Czech. 14, 127.
 Григар, 1965 — Grygar J., Bull. Astr. Inst. Czech. 16, 195.
 Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И., 1964, Линейное и выпуклое программирование. "Наука", М.
 Кастор, 1970 — Castor J. I., ApJ 160, 1187.

- Козырев, 1934 — Kosirev N. A., MN 94, 430.
 Копал, 1946 — Kopal Z., ApJ 103, 310.
 Копал и Шепли, 1946 — Kopal Z., Shapley M., ApJ 104, 160.
 Крон и Гордон, 1950 — Kron G. E., Gordon K. C., ApJ 111, 454.
 Киперман М. Е., Шульберг А. М., 1969, АЖ 46, 412.
 Китакура, 1967 — Kitamura M., "Tables of the characteristic functions", Univ. Tokio Press.
 Кржиж, 1965 — Křiž S., Bull. Astr. Inst. Czech. 16, 118.
 Купер, 1969 — Cooper M. L., Bull. AAS 2, 189.
 Лавров М. И., 1971, АЖ 48, 951.
 Линнелль, 1961 — Linnell A. P., ApJ Suppl. 6, 109.
 Линнелль и Проктор, 1971 — Linnell A. P., Proctor D. D., ApJ 164, 131.
 МакКракен Д., Дорн У., 1969, Численные методы и программирование на Фортране, изд. "Мир", Москва.
 Маудер, 1966 — Mauder H., Kl. Veröff. Remeis Sternw., Bamberg, № 39.
 Невский М. Ю., Рублев С. В., 1963, АЦ № 241.
 Нэльсон и Дэвис, 1972 — Nelson B., Davis W. D., ApJ 174, 617.
 Пустыльник И. Б., 1969, Модели звезд с протяженными атмосферами спектральных классов F—K, изд. АН ЭССР, Тарту.
 Сюняев Р. А., Шакура Н. И., 1972, Препринт ИПМ № 28.
 Табачник В. М., 1968, АЖ 45, 1048.
 Тихонов А. Н., 1963а, Докл. АН СССР, 151, 501.
 Тихонов А. Н., 1963б, Докл. АН СССР, 153, 49.
 Харрис, 1967 — Harris A. J., Contr. Obs. New Mexico State Univ. 1, 8.
 Хаффер и Коллинз, 1962 — Huffer C. M., Collins G. M., ApJ Suppl. 71, 350.
 Хилл и Хатчингс, 1970 — Hill G., Hutchings J. B., ApJ 162, 265.
 Чандрасекар, 1934 — Chandrasekhar S., MN 94, 444.
 Черепашук А. М., 1966, АЖ 43, 517.
 Черепашук А. М., 1971а, в монографии "Затменные переменные звезды", "Наука", М., стр. 261—312, 36—44.
 Черепашук А. М., 1971б, АЖ 48, 1201.
 Черепашук А. М., 1973, АЖ 50 (в печати).
 Черепашук А. М., 1972, АЦ № 739.
 Черепашук А. М., Гончарский А. В., Ягола А. Г., 1967, АЖ 44, 1239.
 Черепашук А. М., Гончарский А. В., Ягола А. Г., 1968, АЖ 45, 1191.
 Черепашук А. М., Гончарский А. В., Ягола А. Г., 1972, АЖ 49, 533.
 Черепашук А. М., Халиуллин Х. Ф., 1972, АЦ № 739.
 Шульберг А. М., 1953, ПЗ 9, 256.
 Юркевич, 1964 — Jurkevich I., Space Science Lab. Mech. Sec. NR64SD.

Москва,
 Гос. астроном. ин-т
 им. П. К. Штернберга,
 физ. факультет
 МГУ, кафедра
 математики

Поступила в редакцию
 8 января 1973 г.

Программа П2

```

PROGRAM MONO
DIMENSION A(50,50),
1X(50), S(50), Z(50), U(50),
2AZ(50), AZT(50), ZT(50),
3ATU(50), GR(50), P(50),
4DIF(50)
PRINT 1
1 FORMAT(20H MONOTONOUS FUNCTION/)
N=50
M=50
PI=3.1415926538
RR=.60
RS=.20
DELTA=1.E-15
C1=0.0
C2=100.
350 READ 350, (P(I), I=1, N)
FORMAT(4E7.0)
PRINT 202, (P(I), I=1, N)
READ 353, (U(I), I=1, N)
353 FORMAT(4E7.0)
AI=81.
AI=AI*PI/180.
DO 351 I=1, N
P(I)=P(I)*PI/180.
X(I)=SQRT(COS(AI)**2+
1(SIN(AI)*SIN(P(I)))**2)
351 CONTINUE
PRINT 352
352 FORMAT(7H SIETKA)
PRINT 202, (X(I), I=1, N)
202 FORMAT(6(E20.9))
R1=M
R2=RR/(R1-1.)
S(I)=0.
DO 52 I=1, M
S(I)=S(I-1)+R2
52 CONTINUE
DO 65 J=1, M
DO 65 I=1, N
R1=RS+X(I)
IF(S(J)-R1) 81, 80, 80
80 A(I, J)=0.
GO TO 65
81 R1=R1
IF(1.E-09-S(J)) 53, 54, 54
54 A(I, J)=0.0
GO TO 65
53 R1=RS-X(I)
IF(S(J)-R1) 55, 55, 56
55 A(I, J)=2.*PI*S(J)
GO TO 65
56 IF(S(J)+R1) 57, 57, 58
57 A(I, J)=0.0
GO TO 65
58 R1=(S(J)**2+X(I)**2-RS**2)/(2.*X(I)
1*S(J))
R2=1.-R1**2
IF(R2) 59, 59, 60
59 R2=0.0
60 R3=SQRT(R2)
IF(R1-1.E-11) 61, 62, 62
62 A(I, J)=2.*S(J)*ATAN(R3/R1)
GO TO 65
61 IF(R1+1.E-11) 63, 63, 64
63 A(I, J)=2.*S(J)*(PI-ATAN(-R3/R1))
GO TO 65
64 A(I, J)=PI*S(J)
65 CONTINUE
K=M-1
Z(M)=-1.
DO 204 I=1, K
204 Z(I)=SQRT(1.-(S(I)/RR)**2)
1-1.

DO 205 I=1, N
R1=0.
R2=0.
DO 206 J=1, K
R1=R1+.5*(A(I, J)*Z(J)+
1A(I, J+1)*Z(J+1))*(S(J+1)-S(J))
206 R2=R2+.5*(A(I, J)+A(I, J+1))*
1(S(J+1)-S(J))
AZ(I)=R1
205 AZT(I)=R2
K=N-1
R5=0.
R1=0.
R2=0.
R3=0.
R4=0.
DO 207 I=1, K
R1=R1+.5*(AZT(I)**2+AZT
1(I+1)**2)*(X(I+1)-X(I))
R2=R2+.5*(AZ(I)*AZT(I)+
1AZ(I+1)*AZT(I+1))*(X(I+1)-X(I))
R3=R3+.5*(AZT(I)*U(I)+AZT
1(I+1)*U(I+1))*(X(I+1)-X(I))
R4=R4+.5*(AZ(I)**2+AZ
1(I+1)**2)*(X(I+1)-X(I))
R5=R5+.5*(AZ(I)*U(I)+AZ
1(I+1)*U(I+1))*(X(I+1)-X(I))
207 CONTINUE
AJ=(R3*R4-R5*R2)/(R1*
1R4-R2*R2)
AB=(R1*R5-R2*R3)/(R1*
1R4-R2*R2)
PRINT 45, AJ, AB
45 FORMAT(2(E20.9))
K=M-1
Z(M)=AJ-AB
DO 210 I=1, K
210 Z(I)=AJ+AB*(SQRT(1.-(S(I)
1/RR)**2)-1.)
DO 501 I=1, M
IF(Z(I)) 502, 502, 501
502 Z(I)=0.
501 CONTINUE
PRINT 67
67 FORMAT(22H INITIAL APPROXIMATION)
PRINT 202, (Z(I), I=1, M)
PRINT 44
44 FORMAT(18H EXPERIMENTAL CURVE/)
PRINT 202, (U(I), I=1, N)
K=N-1
DO 9 J=1, M
R1=0.0
DO 8 I=1, K
R2=.5*(A(I, J)*U(I)+A(I+1, J)*U(I+1))*
1(X(I+1)-X(I))
7 R1=R1+R2
8 CONTINUE
ATU(J)=R1
9 CONTINUE
K=M-1
DO 11 I=1, N
R1=0.0
DO 10 J=1, K
R2=.5*(A(I, J)*Z(J)+A(I, J+1)*Z(J+1))*
1(S(J+1)-S(J))
R1=R1+R2
10 CONTINUE
AZ(I)=R1
11 CONTINUE
R1=0.0
K=N-1
DO 12 I=1, K
R2=.5*(AZ(I)-U(I))**2+(AZ(I+1)-U(I+1))
1**2)*(X(I+1)-X(I))

```

```

12 R1=R1+R2
   FZ0=R1
   PRINT 69
60 FORMAT(4H FZ1)
   PRINT 70 FZ0
70 FORMAT(E20.9)
   PRINT 68
68 FORMAT(14H INITIAL CURVE)
   PRINT 202, (AZ(I), I=1, N)
   DO 400 I=1, N
400 DIF(I)=U(I)-AZ(I)
   PRINT 72
   PRINT 202, (DIF(I), I=1, N)
   IN=0
13 K=N-1
   DO 15 J=1, M
   R1=0.0
   DO 14 I=1, K
   R2=.5*(A(I, J)*AZ(I)+A(I+1, J)*AZ(I+1))*
1(X(I+1)-X(I))
   R1=R1+R2
14 CONTINUE
   GR(J)=R1-ATU(J)
15 CONTINUE
   DO 16 I=1, M
16 ZT(I)=C1
   NS=0
   NSM=0
   K=M-1
   R1=0.0
   DO 17 I=1, K
   R2=.5*(GR(I)*ZT(I)+GR(I+1)*ZT(I+1))*
1(S(I+1)-S(I))
17 R1=R1+R2
   ALM=R1
   DO 20 J=1, M
   NS=NS+1
   ZT(J)=C2
   R1=0.0
   DO 18 I=1, K
   R2=.5*(GR(I)*ZT(I)+GR(I+1)*ZT(I+1))*
1(S(I+1)-S(I))
   R1=R1+R2
18 CONTINUE
   IF(R1-ALM) 19, 20, 20
19 ALM=R1
   NSM=NS
20 CONTINUE
   DO 21 I=1, M
21 ZT(I)=C1
   IF(NSM) 24, 24, 22
22 DO 23 I=1, NSM
23 ZT(I)=C2
24 DO 26 I=1, N
   R1=0.0
   DO 25 J=1, K
   R2=.5*(A(I, J)*ZT(J)+A(I, J+1)*ZT(J+1))*
1(S(J+1)-S(J))
   R1=R1+R2
25 CONTINUE
   AZT(I)=R1
26 CONTINUE
   K=N-1
   R1=0.0
   DO 27 I=1, K
   R2=.5*((AZT(I)-AZ(I))*2+(AZT(I+1)-
1AZ(I+1))*2)*(X(I+1)-X(I))
   R1=R1+R2
27 CONTINUE
   AC=R1
   R1=0.0
   DO 28 I=1, K
   R2=.5*((AZT(I)-AZ(I))*(AZ(I)-U(I))+
1(AZT(I+1)-AZ(I+1))*(AZ(I+1)-U(I+1))*
2(X(I+1)-X(I))
   R1=R1+R2
28 CONTINUE
   BC=2.*R1
   ALPHA=BC/(2.*AC)
   IF(1.-ALPHA) 29, 29, 30

29 ALPHA=1.
   GO TO 32
30 IF(ALPHA) 38, 38, 31
31 FZN=FZ0-(BC**2)/(4.*AC)
   GO TO 33
32 FZN=AC+BC+FZ0
33 DO 34 I=1, M
34 Z(I)=(1.-ALPHA)*Z(I)+ALPHA*ZT(I)
   K=M-1
   DO 36 I=1, N
   R1=0.0
   DO 35 J=1, K
   R2=.5*(A(I, J)*Z(J)+A(I, J+1)*Z(J+1))*
1(S(J+1)-S(J))
   R1=R1+R2
35 CONTINUE
   AZ(I)=R1
36 CONTINUE
   IF(DELTA-FZN) 37, 38, 38
37 FZ0=FZN
   IN=IN+1
   IF(20-IN) 46, 46, 13
46 IN=0
   PRINT 39 ALPHA, DELTA, FZN, FZ0
   PRINT 47
47 FORMAT(15H APPROXIMATION/)
   PRINT 202, (Z(I), I=1, M)
   PRINT 42
   PRINT 202, (AZ(I), I=1, N)
   DO 71 I=1, N
71 DIF(I)=U(I)-AZ(I)
   PRINT 72
72 FORMAT(11H DIFFERENCE)
   PRINT 202, (DIF(I), I=1, N)
   K=M-1
   SVET=0.
   DO 600 I=1, K
600 SVET=SVET+(Z(I)*S(I)+Z(I+1)*
1S(I+1))/2.*(S(I+1)-S(I))
   SVET=2*PI*SVET
   PRINT 601
601 FORMAT(11H SVIETIMOST)
   PRINT 602 SVET
602 FORMAT(E20.9)
   GO TO 13
38 PRINT 39 ALPHA, DELTA, FZN, FZ0
39 FORMAT(4(E20.9))
   PRINT 40
40 FORMAT(8H SOLUTION/)
   PRINT 202, (Z(I), I=1, M)
   PRINT 42
42 FORMAT(17H THEORETICAL CURVE/)
   PRINT 202, (AZ(I), I=1, N)
   STOP
   END

PROGRAM MONO
DIMENSION A(50, 50),
1X(50), S(50), Z(50), U(50),
2AZ(50), AZT(50), ZT(50),
3ATU(50), GR(50), P(50),
4DIF(50)
PRINT 1
1 FORMAT(20H MONOTONOUS FUNCTION/)
N=50
M=50
PI=3.1415926538
RR=.60

RS=.20
DELTA=1.E-15
C1=0.0
C2=6.13
READ 350, (P(I), I=1, N)
350 FORMAT(4E7.0)
PRINT 202, (P(I), I=1, N)
READ 353, (U(I), I=1, N)
353 FORMAT(4E6.0)

```

```

AI=81.
AI=AI*PI/180.
DO 351 I=1,N
P(I)=P(I)*PI/180.
X(I)=SQRT(COS(AI))*2+
1(SIN(AI)*SIN(P(I)))*2
351 CONTINUE
PRINT 352
352 FORMAT(7H SIETKA)
PRINT 202,(X(I),I=1,N)
202 FORMAT(6(E20.9))
R1=M
R2=RR/(R1-1.)
S(I)=0.
DO 52 I=2,M
S(I)=S(I-1)+R2
52 CONTINUE
AX=.3
DO 65 J=1,M
DO 65 I=1,N
IF(1.E-09-X(I)) 500,500,80
500 R1=RS+X(I)
IF(S(J)-R1) 81,80,80
80 A(I,J)=0.
GO TO 65
81 IF(1.E-09-S(J)) 53,80,80
53 R1=RS-X(I)
IF(S(J)-R1) 55,55,56
55 R2=SQRT(4.*S(J)*X(I)/(RS**2-
1(S(J)-X(I))*2))
R3=ELLICE(R2)
A(I,J)=2.*PI*(1.-AX)*S(J)
1+(4.*S(J)/RS)*AX*SQRT(RS**2
2-(S(J)-X(I))*2)*R3
GO TO 65
56 IF(S(J)+R1) 80,80,58
58 R1=(S(J)**2+X(I)**2-RS**2)/
1(2.*X(I)*S(J))
R2=1.-R1**2
IF(R2) 59,59,60
59 R2=0.
60 R3=SQRT(R2)
R2=SQRT((RS**2-(S(J)-X(I))*2)/
1(4.*S(J)*X(I)))
R4=ELLICE(R2)
R5=ELLICE(R2)
R2=8.*S(J)*AX*SQRT(S(J)*X(I))*
1R4/RS+AX*R5*(2.*SQRT(S(J))*
2R3**2-2.*SQRT(S(J))*(S(J)+
3X(I))*2)/(RS*SQRT(X(I)))
IF(R1-1.E-11) 61,62,62
62 A(I,J)=2.*S(J)*ATAN(R3/R1)*
1(1.-AX)+R2
GO TO 65
61 IF(R1+1.E-11) 63,63,64
63 A(I,J)=2.*S(J)*(R1-ATAN(-R3/
1R1))*(1.-AX)+R2
GO TO 65
64 A(I,J)=PI*S(J)*(1.-AX)+R2
65 CONTINUE
DO 204 I=1,M
204 Z(I)=C2*(1.-S(I)/RR)
PRINT 67
67 FORMAT(22H INITIAL APPROXIMATION)
PRINT 202,(Z(I),I=1,M)
PRINT 44
44 FORMAT(18H EXPERIMENTAL CURVE/)
PRINT 202,(U(I),I=1,N)
K=N-1
DO 9 J=1,M
R1=0.0
DO 8 I=1,K
R2=.5*(A(1,J)*U(I)+A(I+1,J)*U(I+1))*
1(X(I+1)-X(I))
7 R1=R1+R2
8 CONTINUE
ATU(J)=R1
9 CONTINUE
K=M-1
DO 11 I=1,N

```

```

R1=0.0
DO 10 J=1,K
R2=.5*(A(1,J)*Z(J)+A(I+1,J)*Z(J+1))*
1(S(J+1)-S(J))
R1=R1+R2
10 CONTINUE
AZ(I)=R1
11 CONTINUE
R1=0.0
K=N-1
DO 12 I=1,K
R2=.5*(AZ(I)-U(I))*2+(AZ(I+1)-U(I+1))
1**2*(X(I+1)-X(I))
12 R1=R1+R2
FZO=R1
PRINT 69
69 FORMAT(4H FZI)
PRINT 70 FZO
70 FORMAT(E20.9)
PRINT 68
68 FORMAT(14H INITIAL CURVE)
PRINT 202,(AZ(I),I=1,N)
DO 400 I=1,N
400 DIF(I)=U(I)-AZ(I)
PRINT 72
PRINT 202,(DIF(I),I=1,N)
IM=0
13 K=N-1
DO 15 J=1,M
R1=0.0
DO 14 I=1,K
R2=.5*(A(1,J)*AZ(I)+A(I+1,J)*AZ(I+1))*
1(X(I+1)-X(I))
R1=R1+R2
14 CONTINUE
GR(J)=R1-ATU(J)
15 CONTINUE
DO 16 I=1,M
16 ZT(I)=C1
NS=0
NSM=0
K=M-1
R1=0.0
DO 17 I=1,K
R2=.5*(GR(I)*ZT(I)+GR(I+1)*ZT(I+1))*
1(S(I+1)-S(I))
17 R1=R1+R2
ALM=R1
DO 20 J=1,M
NS=NS+1
ZT(J)=C2
R1=0.0
DO 18 I=1,K
R2=.5*(GR(I)*ZT(I)+GR(I+1)*ZT(I+1))*
1(S(I+1)-S(I))
R1=R1+R2
18 CONTINUE
IF(R1-ALM) 19,20,20
19 ALM=R1
NSM=NS
20 CONTINUE
DO 21 I=1,M
21 ZT(I)=C1
IF(NSM) 24,24,22
22 DO 23 I=1,NSM
23 ZT(I)=C2
24 DO 26 I=1,N
R1=0.0
DO 25 J=1,K
R2=.5*(A(1,J)*ZT(J)+A(I+1,J)*ZT(J+1))*
1(S(J+1)-S(J))
R1=R1+R2
25 CONTINUE
AZT(I)=R1
26 CONTINUE
K=N-1
R1=0.0
DO 27 I=1,K
R2=.5*(AZT(I)-AZ(I))*2+(AZT(I+1)-

```



```

1AZ(I+1)**2)*(X(I+1)-X(I))
R1=R1+R2
27 CONTINUE
AC=R1
R1=0.0
DO 28 I=1,K
R2=.5*((AZT(I)-AZ(I))*(AZ(I)-U(I))+
1(AZT(I+1)-AZ(I+1))*(AZ(I+1)-U(I+1)))*
2(X(I+1)-X(I))
R1=R1+R2
28 CONTINUE
BC=2.*R1
ALPHA=-BC/(2.*AC)
IF(1.-ALPHA) 29,29,30
29 ALPHA=1.
GO TO 32
30 IF(ALPHA) 38,38,31
31 FZN=FZO-(BC**2)/(4.*AC)
GO TO 33
32 FZN=AC+BC+FZO
33 DO 34 I=1,M
34 Z(I)=(1.-ALPHA)*Z(I)+ALPHA*ZT(I)
K=M-1
DO 36 I=1,N
R1=0.0
DO 35 J=1,K
R2=.5*(A(I,J)*Z(J)+A(I,J+1)*7(J+1))*
1(S(J+1)-S(J))
R1=R1+R2
35 CONTINUE
AZ(I)=R1
36 CONTINUE
IF(DELTA-FZN) 37,38,38
37 FZO=FZN
IN=IN+1
IF(20-IN) 46,46,13
46 IN=0
PRINT 39 ALPHA,DELTA,FZN,FZO
PRINT 47
47 FORMAT(15H APPROXIMATION/)
PRINT 202,(Z(I),I=1,M)
PRINT 42
PRINT 202,(AZ(I),I=1,N)
DO 71 I=1,N
71 DIF(I)=U(I)-AZ(I)
PRINT 72
72 FORMAT(11H DIFFERENCE)
PRINT 202,(DIF(I),I=1,N)
GO TO 13
38 PRINT 39 ALPHA,DELTA,FZN,FZO
39 FORMAT(4(E20,9))
PRINT 40
40 FORMAT(8H SOLUTION/)
PRINT 202,(Z(I),I=1,M)
PRINT 42
42 FORMAT(17H THEORETICAL CURVE/)
PRINT 202,(AZ(I),I=1,N)
STOP
END

```