

**О возможности статистического моделирования кривых блеска
короткопериодических цефеид в шаровых скоплениях**

Т. С. Башарина, Е. Д. Павловская, А. А. Филиппова

Показана возможность статистического моделирования кривых блеска короткопериодических цефеид типов а и б в шаровом скоплении М 5.

Modelling of Light Curves of Shortperiod Stars in Globular Clusters

by T. S. Basharina, E. D. Pavlovskaya, A. A. Filippova

The possibility of modelling of light curves of shortperiod stars in globular clusters is given.

В последние годы широкое применение во многих областях науки и техники нашли методы статистического моделирования на ЭВМ случайных процессов. Эти методы начинают применяться и в работах в области звездной астрономии. Укажем, например, работу Т. А. Агекяна и Ж. П. Аносовой (1967), в которой моделировались начальные условия, при которых исследовалась устойчивость систем типа трапеций. Другим примером является работа Диминга (1970), в которой моделировались кривые блеска неправильных переменных звезд.

В настоящей работе рассматривается моделирование кривых блеска короткопериодических цефеид в шаровых скоплениях. В основе предлагаемого метода лежит предположение о том, что кривые блеска различных переменных звезд в скоплении являются реализациями одного и того же случайного процесса. Другими словами, предполагается, что несмотря на большие индивидуальные различия кривых (в амплитудах, асимметрии и т. п.), все кривые блеска являются проявлениями одного и того же случайного процесса пульсации. Статистические закономерности этого процесса для совокупности короткопериодических цефеид в данном шаровом скоплении можно получить, исследуя большое число индивидуальных кривых блеска этих звезд в

данном скоплении. Разработаны математические методы, позволяющие по полученным статистическим закономерностям создать алгоритм для вычисления на ЭВМ реализаций изучаемого случайного процесса. Подтверждением правильности сделанного предположения о случайности механизма пульсаций будет служить согласие тех статистических закономерностей реального и смоделированного процессов, которые не были использованы при моделировании. В случае удовлетворительного решения задачи моделирования большое число полученных на ЭВМ реализаций можно использовать для более детального изучения статистических закономерностей, присущих совокупности кривых блеска короткопериодических цефеид в рассматриваемом скоплении.

Перейдем теперь к описанию сделанных нами предположений. Пусть n — число рассматриваемых звезд в скоплении. Обозначим через $Z_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) индивидуальную среднюю кривую блеска i -ой звезды, где x — фаза кривой блеска, выраженная в долях периода. Через $\bar{Z}(x)$ обозначим среднее арифметическое этих кривых, т. е.

$$\bar{Z}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i(x).$$

Рассмотрим функции

$$y_i(x) = Z_i(x) - \bar{Z}(x), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

являющиеся отклонениями индивидуальных средних кривых блеска от их среднего арифметического. Уклонения $y_i(x)$ будем рассматривать и моделировать в 20 точках вида $x_k = k/20$ ($k = 1, 2, \dots, 20$), равномерно расположенных по длине периода. Введем обозначение

$$y_i^{(k)} = y_i(x_k) \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, 20)$$

и будем называть эту величину k -м сечением для i -ой звезды.

Наряду с двадцатью сечениями моделировалась также величина периода P . Положим

$$y_i^{(0)} = P_i - \bar{P}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

где P_i — период i -ой звезды, $\bar{P} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_i$ — среднее арифметическое периодов всех рассматриваемых звезд. Таким образом, мы моделировали 21-мерную случайную величину

$$\bar{\zeta} = \begin{pmatrix} y^{(0)} \\ y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(20)} \end{pmatrix}$$

Было сделано предположение о том, что 21-мерная случайная величина $\bar{\zeta}$ имеет 21-мерное нормальное распределение. В частности, из этого предположения следует, что любая из компонент $y^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 20$) распределена нормально, т. е. нормальное распределение имеет период P и каждое из сечений $y^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, 20$). Построенные нами распределения каждой из величин $y^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 20$) для рас-

сматриваемого шарового скопления не очень хорошо согласуются с нормальным. Однако, момент 3-го порядка, характеризующий асимметрию распределения, ни в одном случае не превосходит своей утроенной средней квадратической ошибки.

Как известно, многомерное нормальное распределение полностью определяется заданием средних значений компонент и так называемой корреляционной матрицы, т. е. матрицы корреляционных моментов компонент. Средние значения компонент считаем равными 0, так как компоненты являются отклонениями соответствующих величин от их среднего арифметического (см. ф-лы (1) и (2)).

Элементы b_{ij} матрицы В корреляционных моментов величин $y^{(k)}$ ($k=0, 1, \dots, 20$) вычислялись по формуле:

$$b_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n y_s^{(i)} y_s^{(j)} \quad \begin{matrix} 0 \leq i \leq 20, \\ 0 \leq j \leq 20. \end{matrix} \quad (3)$$

21-мерную случайную величину $\bar{\zeta} = \begin{pmatrix} y^{(0)} \\ y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(20)} \end{pmatrix}$ ищем в виде

$$\bar{\zeta} = A \cdot \bar{X}, \quad (4)$$

где $\bar{X} = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(20)} \end{pmatrix}$ — столбец из независимых нормально распределенных с параметрами 0 и 1 случайных величин, а A — квадратная матрица порядка 21, удовлетворяющая условию:

$$A \cdot A^T = B, \quad (5)$$

где A^T — матрица, транспонированная к A .

Будем искать матрицу A в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 \dots & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 \dots & 0 \\ \dots & & & \\ a_{20,1} & a_{20,2} & a_{20,3} \dots & a_{20,20} \end{pmatrix}.$$

Для определения элементов этой матрицы воспользуемся матричным соотношением (5), которое эквивалентно следующей системе скалярных равенств:

$$\begin{aligned} a_{00}^2 &= b_{00} \\ a_{00} \cdot a_{10} &= b_{01} \\ a_{10}^2 + a_{11}^2 &= b_{11} \\ a_{00} \cdot a_{20} &= b_{02} \\ a_{10} \cdot a_{20} + a_{11} \cdot a_{21} &= b_{12} \\ a_{20}^2 + a_{21}^2 &= b_{22} \\ \dots & \\ a_{20,1}^2 + a_{20,2}^2 + \dots + a_{20,20}^2 &= b_{20,20} \end{aligned} \quad (6)$$

Используя ранее полученные элементы b_{ij} матрицы B , из данной системы последовательно определяем элементы a_{ij} матрицы A . После получения матрицы A по формуле (4) вычислялась 21-мерная случайная

величина $\zeta = \begin{pmatrix} y^{(0)} \\ y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(20)} \end{pmatrix}$, при этом величины $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(20)}$

были получены на ЭВМ М-20 и БЭСМ-4 вычислительного центра МГУ по программе, предложенной В. С. Губенко и А. И. Черкуновым (Ляшенко, 1967). Затем по формулам (1) и (2) были вычислены величины $Z(k/20) = \bar{Z}(k/20) + y^{(k)}$ и $P = P + y^{(0)}$

Указанная программа дает возможность получить практически неограниченное число независимых нормально распределенных с параметрами 0 и 1 случайных величин. Многократно повторяя процесс получения с помощью программы 21-го случайного числа, будем получать описанным выше способом всё новые реализации изучаемого случайного процесса.

Все вычисления производились на ВЦ МГУ на машине М-20 и БЭСМ-4 по программе, составленной для решения этой задачи Е. Д. Павловской. Программа предусматривает решение системы вида (6), получение многомерной случайной величины ζ и реализаций исследуемого процесса.

Изложенная выше методика была применена к комплексу кривых блеска короткопериодических цефеид в шаровом скоплении М5. Данные о кривых блеска этих звезд были взяты из работы Остерхофа (1941).

Поскольку кривые блеска короткопериодических цефеид типов а и б существенно отличаются от кривых блеска звезд типа с, то нам казалось целесообразным попытаться моделировать кривые блеска только звезд типов а и б (период больше 0.4).

По отклонениям отдельных кривых $y_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, 62$) была вычислена матрица B , как описано выше, а затем и матрица A с помощью решения системы (6). После этого на основании векторного равенства (4) были получены реализации случайного процесса. На рис. 1 показаны для примера некоторые из смоделированных на ЭВМ реализаций. Было получено 5 выборок по 62 реализации (объем выборок принимался равным объему исходной совокупности в скоплении М5). При этом две выборки (выборки №4 и №5, табл. 1) были получены по описанной методике. Выборки 1, 2 и 3 были получены несколько иным путем. Отличие состояло в том, что для получения реализаций кривых блеска в двадцати точках и периода P моделировалась 23-мерная случайная величина $(y_1, y_2, \dots, y_{20}, A, \epsilon, P)$ по корреляционной матрице 23-го порядка, учитывающей корреляционные связи периода и двадцати сечений с величиной амплитуды A и асимметрией ϵ .

Для сравнения смоделированных кривых блеска с кривыми блеска короткопериодических цефеид в скоплении М5, по машинным реализа-

циям были определены те же характеристики кривой блеска, что и в работе Остерхофа (1941), а именно: амплитуда кривой A , асимметрия кривой ϵ ,

$$m_{med} = \frac{m_{max} + m_{min}}{2}, \quad \bar{m} = \frac{\sum_1^n m_i}{n}, \quad \gamma = \bar{m} - m_{med}, \quad \zeta = m_{0.5P} - m_{med},$$

где $m_{0.5P}$ — звездная величина, при которой расстояние между восходящей и нисходящей ветвями кривой блеска равно $P/2$. На рис. 2 при-

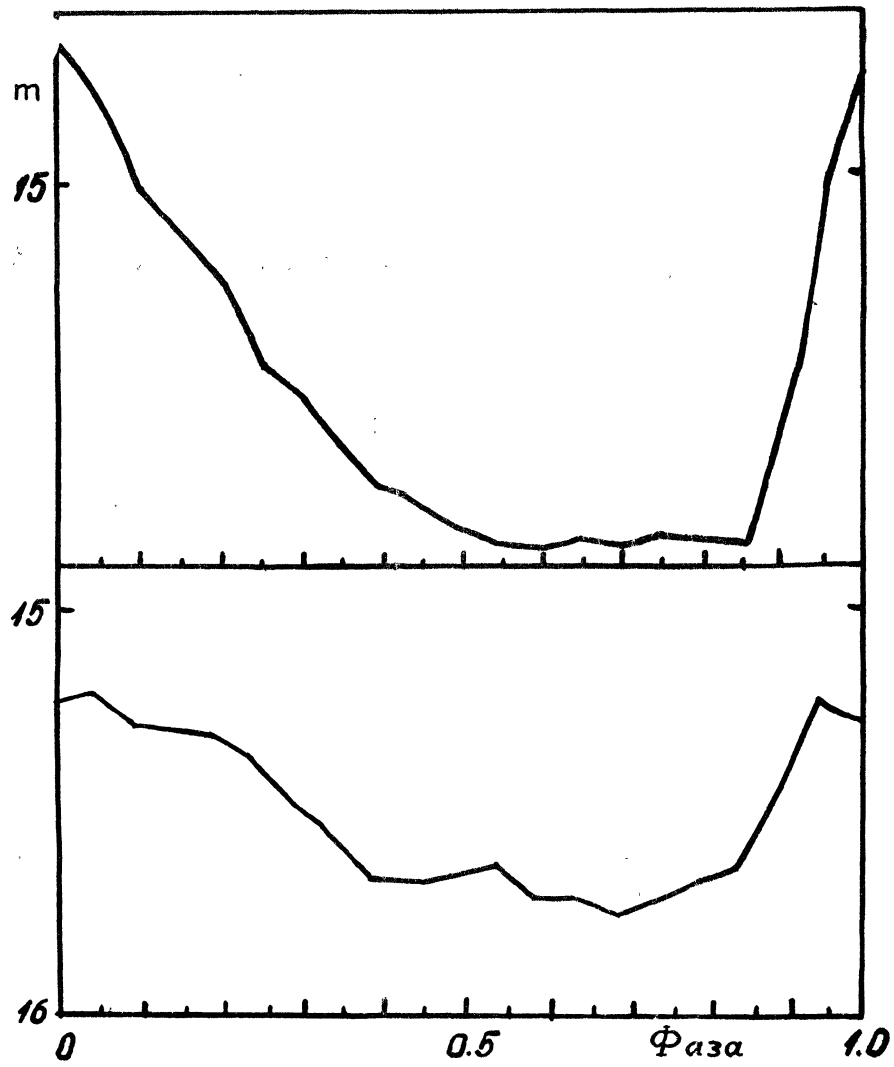


Рис. 1

ведены зависимости между величинами A и $1/P$ для а) исходной совокупности в скоплении М5; б) выборки 1; в) выборки 2. На рис. 3 приведены зависимости $1/P$, ζ , на рис. 4 — зависимости $1/P$, ϵ , на рис. 5 — зависимости $1/P$, γ/A . Рисунки 2–5 показывают, что полученные по машинным реализациям зависимости аналогичны соответствующим зависимостям в скоплении М5.

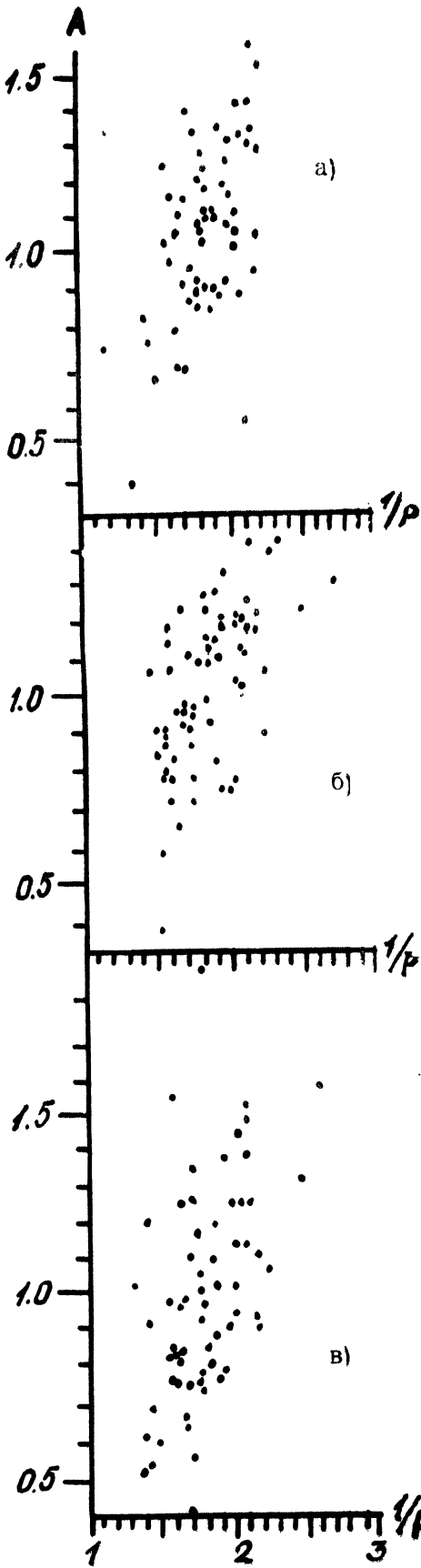


Рис. 2

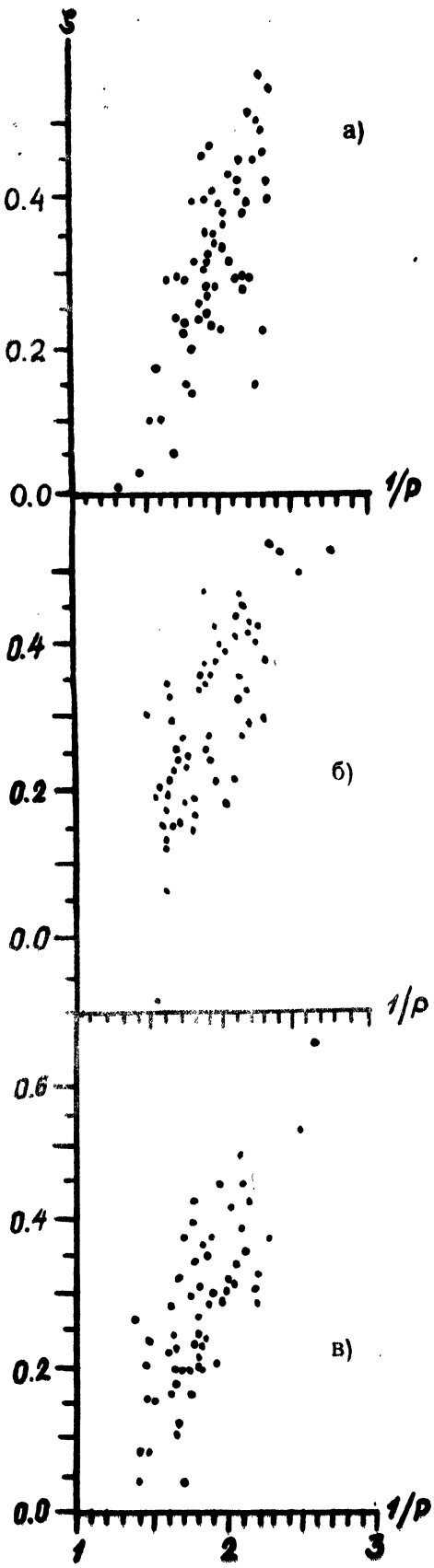


Рис. 3

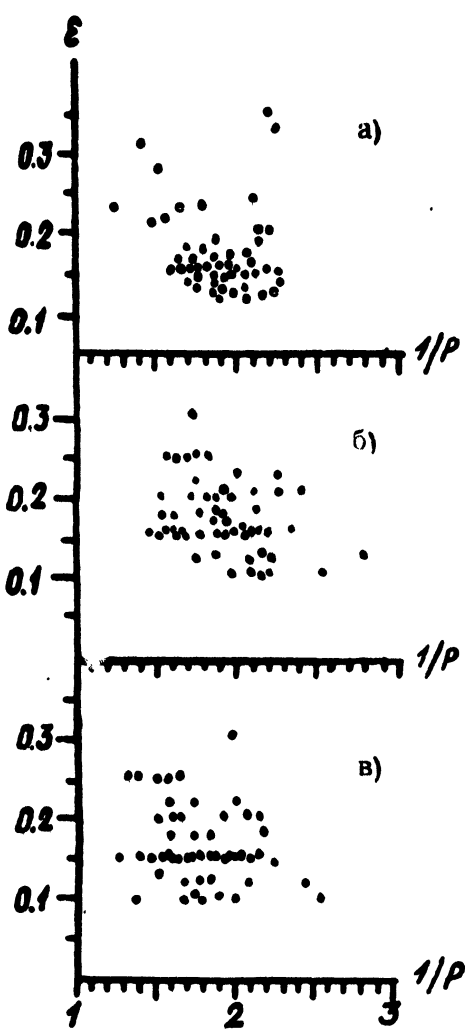


Рис. 4

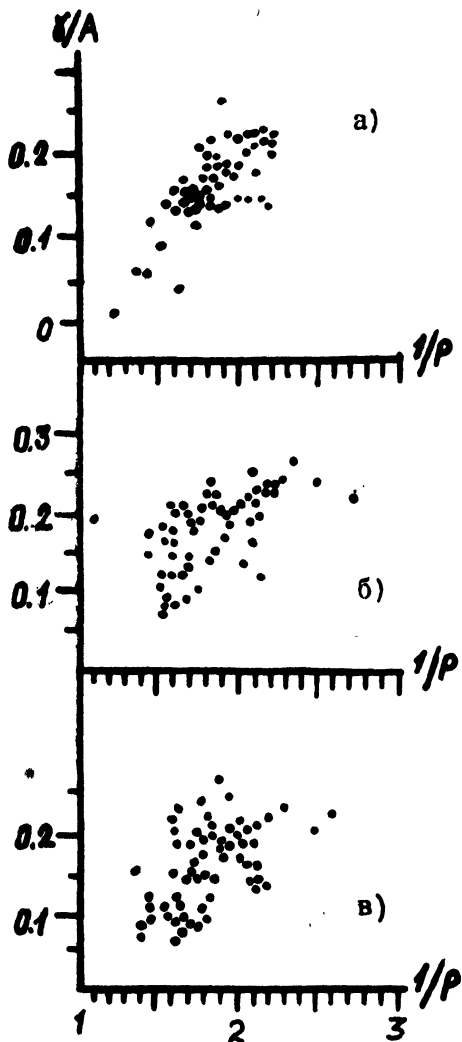


Рис. 5

Таблица 1

	Λ	σ_{Λ}	ϵ	σ_{ϵ}	m_{mod}	$\sigma_{m_{mod}}$	ζ	σ_{ζ}	γ/A	$\sigma_{\gamma/A}$
Исходные кривые	1.05	0.236	0.17	0.050	15.11	0.188	0.31	0.124	0.16	0.049
выб. 1	1.00	0.206	0.11	0.050	15.14	0.193	0.26	0.100	0.14	0.042
выб. 2	1.01	0.219	0.17	0.045	15.14	0.193	0.28	0.095	0.16	0.041
выб. 3	0.98	0.234	0.17	0.040	15.17	0.196	0.28	0.130	0.15	0.049
выб. 4	1.03	0.238	0.17	0.043	15.12	0.194	0.29	0.123	0.18	0.046
выб. 5	0.97	0.277	0.16	0.046	15.17	0.208	0.27	0.115	0.18	0.096

В таблице 1 приведены средние значения и дисперсии всех указанных выше характеристик кривой блеска. Как видно из таблицы 1, различия средних значений характеристик кривых блеска исходной совокупности и смоделированных совокупностей составляют, как правило, доли σ и нигде не превосходят даже 2σ . Таким образом, можно считать, что

средние характеристики смоделированных совокупностей хорошо согласуются с соответствующими характеристиками исходной совокупности.

Для количественной характеристики зависимостей, приведенных на рис. 2–5, были вычислены по обычным формулам оценки коэффициента корреляции. Вычисления были выполнены для объектов исходной совокупности и для выборок 1–5. Результаты приведены в таблице 2.

Таблица 2

	P/A	P, ζ	$P, \gamma/A$	$\zeta-\gamma/A$	$\zeta-A$	$A-\gamma/A$	$\epsilon-\zeta$	$\epsilon-A$	$\epsilon-\gamma/A$	$\epsilon-P$
ρ	-0.505	-0.709	-0.762	0.872	0.865	0.572	-0.616	-0.599	-0.528	0.271

k = 23

выб. 1	-0.453	-0.652	-0.659	0.775	0.817	0.379	-0.551	-0.471	-0.421	0.304
выб. 2	-0.614	-0.668	-0.417	0.700	0.789	0.288	-0.108	-0.063	0.035	0.054
выб. 3	-0.511	-0.591	-0.675	0.805	0.851	0.676	-0.249	-0.265	-0.053	0.090

k = 21

выб. 4	-0.535	-0.699	-0.622	0.766	0.771	0.400	-0.304	-0.381	-0.090	0.261
выб. 5	-0.536	-0.744	-0.519	0.584	0.736	0.103	-0.338	-0.302	0.013	0.231

	$m_{med}-P$	$m_{med}-\zeta$	$m_{med}-\epsilon$	$m_{med}-A$	$m_{med}-\gamma/A$
ρ	0.084	-0.145	-0.038	-0.210	0.008

k = 23

выб. 1	-0.003	-0.136	0.038	-0.081	-0.157
выб. 2	-0.032	-0.152	-0.192	-0.136	-0.164
выб. 3	0.130	-0.094	0.017	-0.441	-0.321

k = 21

выб. 4	0.042	-0.292	-0.111	-0.061	-0.340
выб. 5	-0.179	-0.128	0.144	-0.091	-0.110

Ниже приводятся результаты, позволяющие судить о согласии коэффициентов корреляции смоделированных и исходной совокупностей. Следует при этом отметить, что все двумерные законы распределения, для которых в таблице 2 приведены коэффициенты корреляции, предполагаются нормальными. По-видимому, это предположение является грубым приближением к действительности, т. к. даже одномерные законы распределения, как указывалось выше, не слишком хорошо согласуются с нормальным.

Как видно из таблицы 2, величина коэффициента корреляции для некоторых зависимостей мала по абсолютной величине. Поэтому целесообразно проверить гипотезу о равенстве 0 теоретического коэффициента корреляции для этих зависимостей. Это сделано следующим образом. Величина $t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{n-2}$, где r — выборочный коэффициент корреляции, а n — объем выборки, распределена по закону Стьюдента с $n-2$ степенями свободы. Пусть $t_{\mathcal{P}}$ — число такое, что

$$\int_{-t_{\mathcal{P}}}^{t_{\mathcal{P}}} S_{n-2}(x) dx = 1 - \mathcal{P}$$

где $S_{n-2}(x)$ — плотность распределения закона Стьюдента с $n-2$ степенями свободы. Тогда с вероятностью $\mathcal{P}$ имеем:

$$|r| > \frac{t_{\mathcal{P}}}{\sqrt{n-2+t_{\mathcal{P}}^2}}$$

Если $\mathcal{P} = 0.0455$, то при $n = 62$ по таблицам имеем $t_{\mathcal{P}} = 2.0$ и значения

$|r|$, превосходящие $\frac{t_{\mathcal{P}}}{\sqrt{n-2+t_{\mathcal{P}}^2}} = 0.25$, оказываются значимыми.

Как показывают данные таблицы 2, все зависимости между m_{mod} и другими характеристиками кривой блеска оказались незначимыми, и, следовательно, m_{mod} не коррелирует ни с одной из характеристик кривой блеска (см. столбцы 11–15 табл. 2).

В тех случаях, когда коэффициент корреляции отличен от нуля, интересно сравнить коэффициенты корреляции для исходной совокупности и выборок 1–5. Сравнение выполнено следующим образом:

$$\text{Величина } Z = \frac{1}{2} [\ln(1+r) - \ln(1-r)] = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$$

где r — выборочный коэффициент корреляции, распределена нормально с

$$M_Z \approx \eta + \frac{\rho}{2(n-1)} \quad \text{и} \quad D_Z \approx \frac{1}{n-3}, \quad \text{где } \eta = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho},$$

а ρ — коэффициент корреляции, вычисленный для исходной совокупности объектов. Величина $\left(Z - \eta - \frac{\rho}{2(n-1)} \right) \sqrt{n-3}$ распределена нормально с параметрами 0 и 1 (см., например, книги: Хальд, 1956; ван дер Варден, 1960; Крамер, 1948). В таблице 2 подчеркнуты те значения выборочных коэффициентов корреляции, которые значимо отличаются от ρ (5% уровень значимости) и набраны курсивом те значения выборочных коэффициентов корреляции, которые соответствуют высокозначимым отклонениям от ρ (уровень значимости 1%).

По-видимому, часть значимых и высокозначимых отклонений в таблице 2 является следствием отличия реальных двумерных законов распределения от нормального, поскольку характер зависимостей между различными характеристиками кривых блеска (см. табл. 1 и рис. 2–5) при моделировании воспроизводится хорошо.

На основании данных таблицы 2 можно сделать вывод о том, что наиболее значимые отличия между τ и ρ имеют место для тех зависимостей, в которых рассматривается асимметрия кривой блеска ϵ . По-видимому, это связано с произволом в определении величины ϵ по реализациям.

Реализации хорошо воспроизводят зависимости $P-A$, $P-\zeta$.

Моделирование 23-мерной случайной величины $(y_1, \dots, y_{20}, P, A, \epsilon)$ и 21-мерной случайной величины $(y_1, \dots, y_{20}, P)$ не приводит к существенному различию результатов моделирования, поэтому в дальнейшем нам кажется целесообразным моделировать только 21-мерную случайную величину.

Данные таблиц 1 и 2 и рис. 2-5 указывают на удовлетворительное согласие кривых блеска совокупности короткопериодических цефеид в скоплении M5 с их машинными реализациями. По-видимому, подтверждается основное предположение настоящей работы о том, что индивидуальные кривые блеска короткопериодических цефеид типов а и б можно рассматривать как реализации одного процесса — процесса пульсации переменной звезды рассматриваемого типа в шаровом скоплении.

Литература:

- Агекян Т.А., Аносова Ж.П., 1967, АЖ 44, № 6.
 ван дер Варден Б.Л., 1960. Математическая статистика, ИЛ, Москва
 Диминг, 1970 — Deeming T. J., AJ 75, № 9, 1027.
 Крамер Г., 1948. Математические методы статистики, ИЛ, Москва.
 Ляшенко Р.Ф., 1967. Программирование для цифровых вычислительных машин. Сов. радио, Москва.
 Остерхоф. 1941 — Oosterhoff P. Th., Leid Ann XVII, № 4.
 Хальд А., 1956, Математическая статистика с техническими приложениями. ИЛ, Москва.

Гос. астрон. ин-т им. П. К. Штернберга
 Моск. ин-т электронного машиностроения

Поступила в редакцию
 28 марта 1972г.