

Новый метод вычисления функций $\alpha(k, p)$ для затменных двойных систем

М. И. Лавров

Новый метод машинных вычислений функций $\alpha(k, p)$ основан на разбиении закрытой части диска затмеваемой звезды на n концентрических полосок. Каждая полоска делится на две части. Потеря блеска с первой, обычно и большей части, вычисляется путем точного интегрирования выражения $\Delta L'_i = \int_{S'_i} \cos \gamma d\sigma$. Потеря же блеска со второй части вычисляется путем приближенного интегрирования аналогичного выражения $\Delta L''_i = \int_{S''_i} \cos \gamma d\sigma \approx S''_i \overline{\cos \gamma_i}$. Приближенное значение $\overline{\cos \gamma_i}$ может быть вычислено по формуле

$$\overline{\cos \gamma_i} = \left\{ 1 - [c_{i-1} + \frac{1}{3}(c_i - c_{i-1})]^2 \right\}^{\frac{1}{2}};$$

где c_{i-1}, c_i — относительные радиусы внутренней и внешней границ полосок. Новый метод весьма удобен для программирования: алгоритм вычислений прост, краток и един для всех видов функции α . Описана программа вычислений $\alpha(k, p)$ с помощью ЭВМ "Наири".

New Method of Computations of $\alpha(k, p)$ Function for Eclipsing Binary Systems

by M. I. Lavrov

New method of computer calculations of the eclipse functions $\alpha(k, p)$ is based on the division of the eclipsed area of star's disk into n concentric strips. Each strip consists of two parts. Loss of the light from the first, usually the larger part from two, is calculated by precise integration of expression $\Delta L'_i = \int_{S'_i} \cos \gamma d\sigma$. Loss of the light from the second part is calculated by approximate integration of the same expression $\Delta L''_i = \int_{S''_i} \cos \gamma d\sigma \approx S''_i \overline{\cos \gamma_i}$. The approximate value $\overline{\cos \gamma_i}$ may be computed from the formula $\overline{\cos \gamma_i} = \left\{ 1 - [c_{i-1} + \frac{1}{3}(c_i - c_{i-1})]^2 \right\}^{1/2}$, where c_{i-1}, c_i are relative radii of the inner and outer boundaries of the strips. The new method is very convenient for programming: the algorithm of computations is simple, short and the same for any kind of eclipse function. The computer program for "Nairy" is described.

Введение. Широкое использование электронных вычислительных машин для анализа кривых блеска затменных двойных систем задержалось по сравнению с другими областями астрофизики. Главной причиной этого оказалась сложность вычисления основных функций теории затменных двойных звезд $x_a^{oc}(k, p)$, $x_a^{tr}(k, p)$, $x_a^{ann}(k, p)$ даже для случая круговых дисков звезд с линейным законом потемнения к краю $I = I_0(1 - x + x \cos \gamma)$. Аналитические выражения этих функций при $x = 1$ (гипотеза "D") были впервые получены Цесевичем (1936), который использовал их для составления обширных таблиц (Цесевич 1939, 1940) как самих этих функций, так и обращенных функций $x_p(k, a)$. Меррилл (1950) придал этим выражениям несколько иной вид, в котором они обычно и используются в настоящее время. Первые машинные вычисления функций a и их производных da/dr , da/dk по этим формулам были осуществлены Юркевичем (1970 а, б) и Линнелом (1965, 1966, 1970). Однако, их программы вычислений довольно сложны и различны для затмений разных типов. Сложность этих программ связана с необходимостью вычисления эллиптических интегралов.

В этой статье рассматриваются математические основы предложенного автором (Лавров, 1971, 1972) нового метода машинных вычислений функций $a(k, p)$ для случая круговых дисков с линейным законом потемнения к краю.

Гипотеза U. Пусть для определенности большая звезда затмевает малую и пусть радиусы звезд соответственно равны $r_1 = 1$, $r_2 = k$, причем $k \leq 1$. Введем в картинной плоскости прямоугольную систему координат с началом в центре диска затмеваемой звезды O_2 и направим ось x по линии центров дисков O_2O_1 (рис. 1). Расстояние $\delta = O_2O_1$ между центрами дисков выразим как обычно через отношение радиусов звезд и величину геометрической глубины затмения p в рассматриваемый момент (Цесевич, 1947):

$$\delta = 1 + kp. \quad (1)$$

Выражения

$$x^2 + y^2 = k^2, \quad (2)$$

$$(x - \delta)^2 + y^2 = 1 \quad (3)$$

являются уравнениями лимбов звезд в принятой системе координат. Совместное решение этих уравнений дает координаты точек пересечения лимбов. Полная симметрия картины затмения относительно оси x позволяет ограничиться рассмотрением только одной точки А:

$$x_A = \frac{\delta^2 + k^2 - 1}{2\delta}, \quad y_A = (k^2 - x_A^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Как известно (Цесевич, 1947), фотометрическая фаза затмения для гипотезы U независимо от типа затмения, т. е. от того, какая из звезд в данный момент затмевается, равна:

$$u_a = \frac{S_{AEBF}}{\pi k^2}, \quad (5)$$

где S_{AEBF} — площадь закрытой части диска затмеваемой звезды, а πk^2 — площадь диска малой звезды. Как показывает рис. 1, $S_{AEBF} = S_{AEB} + S_{AFB}$, последние же в свою очередь равны:

$$S_{AEB} = 2 \int_{x_A}^k (k^2 - x^2)^{1/2} dx = k^2 \arccos \frac{x_A}{k} - x_A y_A, \quad (6)$$

$$S_{AFB} = 2 \int_{\delta - x_A}^1 [1 - (x - \delta)^2]^{1/2} dx = \arccos (\delta - x_A) - y_A (\delta - x_A). \quad (7)$$

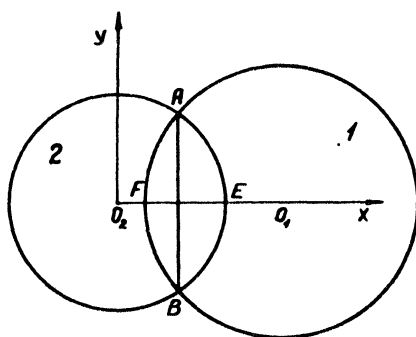


Рис. 1

Таким образом, для фотометрической фазы затмения u_a мы получим

$$u_a = \frac{1}{\pi k^2} [k^2 \arccos \frac{x}{k} + \arccos (\delta - x) - y \delta]. \quad (8)$$

Эта формула вместе с сопутствующими ей выражениями (1) и (4) проще обычно применяемых формул (Цесевич, 1947) и более удобна для машинного использования.

Гипотеза D. а) Покрытия. Фотометрическая фаза для случая покрытий

$$D_{a^{\circ c}} = \frac{\Delta L}{L_2}, \quad (9)$$

где L_2 — потеря блеска в момент внутреннего касания лимбов, равная полному блеску малой звезды, а ΔL — потеря блеска от закрытой части диска этой же звезды в рассматриваемый момент затмения. Последняя величина, как известно (Цесевич, 1940, 1947), равна:

$$\Delta L = I_0 \int_S \cos \gamma d\sigma, \quad (10)$$

где S — область интегрирования, представляющая собою закрытую часть диска затмеваемой, малой звезды, $d\sigma$ — элементарная пло-

щадка диска, γ — угол между лучом зрения и нормалью к поверхности звезды, I_0 — поверхностная яркость в центре диска затмеваемой звезды. Применение формулы (10) ко всему диску малой звезды дает (Цесевич, 1947):

$$L_2 = \frac{2}{3} I_0 \pi k^2. \quad (11)$$

Поскольку при подстановке выражений (10) и (11) в формулу (9) I_0 сокращается, мы будем в дальнейшем во всех формулах полагать эту величину равной единице.

Прямое определение ΔL по формуле (10) приводит к сложному выражению, содержащему эллиптические интегралы (Цесевич, 1936, 1947). Однако вычисления ΔL можно произвести приближенным методом, обеспечивающим в конечном итоге точность значений D_a не ниже, например, 10^{-5} — точность, заведомо превосходящую современные практические потребности. Для этого будем разбивать закрытую часть диска малой звезды концентрическими окружностями с радиусами $c_i k$, $c_i \leq 1$, на n полосок и вычислять каждый раз сумму потерь блеска от них:

$$\Delta L = \sum_{i=1}^n \Delta L_i. \quad (12)$$

Лимб (3) затмевающей звезды будет пересекаться с этими окружностями, уравнения которых $x^2 + y^2 = c_i^2 k^2$, в точках с координатами:

$$x_i = \frac{\delta^2 + c_i^2 k^2 - 1}{2\delta}, \quad y_i = (c_i^2 k^2 - x_i^2)^{1/2} \quad (13)$$

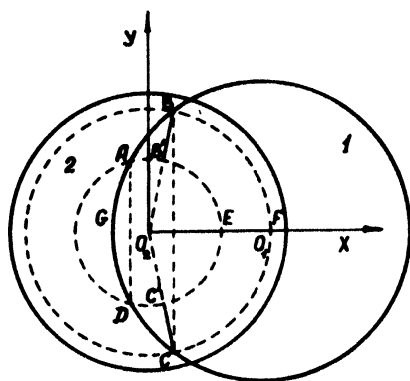


Рис. 2

Выделим i -ую полоску и вычислим потерю блеска от нее ΔL_i . Рис. 2 показывает, что площадь этой полоски $S_i = S'_i + S''_i$, где S'_i — площадь кольца $B'BFCC'E'V'$, S''_i — площадь равнобедренной треугольной фигуры, образуемой дугами AB , CD и $AB' + C'D$. Потерю блеска с площади S'_i легко вычислить путем точного интегрирования (10):

$$\Delta L'_i = \int_{S'_i} \cos \gamma d\sigma = \frac{2}{3} \phi_i k^2 (\cos^3 \gamma_{i-1} - \cos^3 \gamma_i), \quad (14)$$

где

$$\cos \gamma_i = (1 - c_i^2)^{1/2}, \quad \cos \gamma_{i+1} = (1 - c_{i+1}^2)^{1/2} \quad (15)$$

$\phi_i = \arccos \frac{x_i}{c_i k}$ — угол BO_2O_1 , а $x_i = x_B$ определяются по формуле (13).

А вот вычисление потери блеска с площади S_i'' снова приводит к эллиптическим интегралам. Поскольку в большем числе случаев $S_i'' \ll S_i'$, мы можем без существенного ущерба для точности D_a ограничиться вычислением интеграла (10) по теореме о среднем значении:

$$\Delta L_i'' = \int_{S_i''} \cos \gamma d\sigma \approx S_i'' \overline{\cos \gamma_i}. \quad (16)$$

Погрешность, которая при этом возникает, будет полностью зависеть от того, как точно мы сможем подобрать значение $\overline{\cos \gamma_i}$, поскольку величина площади S_i'' может быть вычислена абсолютно точно через значения площадей S_i и S_i' :

$$S_i'' = S_i - S_i' \quad (17)$$

Как показывает рисунок 2,

$$S_i = \sigma_i' - \sigma_{i+1}' + \sigma_i'' - \sigma_{i+1}'', \quad (18)$$

где σ_i' , σ_{i+1}' — площади сегментов BFC и AB'E'C'D , а σ_i'' , σ_{i+1}'' — площади сегментов BAGDC и AGD , вычисляемые соответственно по формулам типа (6) и (7):

$$\sigma_i' = c_i^2 k^2 \phi_i - x_i y_i, \quad (19)$$

$$\sigma_{i+1}' = c_{i+1}^2 k^2 \phi_{i+1} - x_{i+1} y_{i+1};$$

$$\sigma_i'' = \psi_i - (\delta - x_i) y_i, \quad (20)$$

$$\sigma_{i+1}'' = \psi_{i+1} - (\delta - x_{i+1}) y_{i+1},$$

в которых

$$\phi_i = \arccos \frac{x_i}{c_i k}, \quad \phi_{i+1} = \arccos \frac{x_{i+1}}{c_{i+1} k}; \quad (21)$$

$$\psi_i = \arccos (\delta - x_i), \quad \psi_{i+1} = \arccos (\delta - x_{i+1}). \quad (22)$$

Площадь же S_i' вычисляется по элементарной формуле:

$$S_i' = k^2 \phi_i (c_i^2 - c_{i+1}^2). \quad (23)$$

Подставляя выражения (17)–(23) в (16), получим

$$\Delta L_i'' = [c_{i+1}^2 k^2 (\phi_i - \phi_{i+1}) + (\psi_i - \psi_{i+1}) - \delta (y_i - y_{i+1})] \overline{\cos \gamma_i}. \quad (24)$$

Другой путь вывода формулы, эквивалентной (24), описан ранее (Лавров, 1970 а, б).

Поскольку $\Delta L_i = \Delta L_i' + \Delta L_i''$, в окончательном виде алгоритм вычисления потерь блеска для покрытий будет иметь вид:

$$\Delta L_i^{\circ c} = \frac{2}{3} \phi_i k^2 (\cos^3 \gamma_{i+1} - \cos^3 \gamma_i) + [c_{i+1}^2 k^2 (\phi_i - \phi_{i+1}) + (\psi_i - \psi_{i+1}) - \delta(y_i - y_{i+1})] \overline{\cos \gamma_i} . \quad (25)$$

Нарезание полосок начинается с проведения окружности радиуса $r_1 = c_1 k$, где $c_1 = |p|$, и заканчивается окружностью с радиусом $r_n = c_n k$, где $c_n = 1$. Таким образом, для покрытий

$$|p| \leq c_i \leq 1. \quad (26)$$

б) Прохождения. Поместим начало прямоугольной системы координат в точке O_1 , центре диска большой, затмеваемой звезды, а ось x направим по-прежнему по линии центров дисков $O_1 O_2$. Фотометрическая фаза для прохождений

$$D_{at} = \frac{\Delta L}{L_1'} , \quad (27)$$

где L_1' — потеря блеска в момент внутреннего касания дисков, равная при $r_1 = 1$, $r_2 = k$ (Цесевич, 1936, 1947):

$$L_1' = \frac{1}{9} [12 \arcsin \sqrt{k} - (12 + 8k - 32k^2) \sqrt{k(1-k)}] , \quad (28)$$

а ΔL — потеря блеска от закрытой части диска большой звезды в рассматриваемый момент затмения. Пересечение лимба $(x - \delta)^2 + y^2 = k^2$ затмевающей звезды с концентрическими окружностями $x^2 + y^2 = c_i^2$ диска затмеваемой происходит в точках с координатами:

$$x_i = \frac{\delta^2 + c_i^2 - k^2}{2\delta}, \quad y_i = (c_i^2 - x_i^2)^{1/2} \quad (29)$$

Рассуждения, аналогичные рассмотренным для случая покрытий, приводят к алгоритму вычисления ΔL_i в форме:

$$\Delta L_i^{tr} = \frac{2}{3} \phi_i (\cos^3 \gamma_{i+1} - \cos^3 \gamma_i) + [c_{i+1}^2 (\phi_i - \phi_{i+1}) + k^2 (\psi_i - \psi_{i+1}) - \delta(y_i - y_{i+1})] \overline{\cos \gamma_i}, \quad (30)$$

где

$$\phi_i = \arccos \frac{x_i}{c_i}, \quad \phi_{i+1} = \arccos \frac{x_{i+1}}{c_{i+1}}, \quad (31)$$

$$\psi_i = \arccos \frac{1}{k} (\delta - x_i), \quad \psi_{i+1} = \arccos \frac{1}{k} (\delta - x_{i+1}), \quad (32)$$

а $\cos \gamma_{i+1}$, $\cos \gamma_i$ определяются по формулам (15). Этот алгоритм одинаково применим как к частным, так и к кольцевым фазам затмения. Нарезание полосок начинается с окружности радиуса $r_1 = c_1$, где $c_1 = |\delta - k|$, и заканчивается окружностью с радиусом $r_n = c_n$, где $c_n = 1$ для частных, $c_n = \delta + k$ для кольцевых фаз. Таким образом, в случае прохождений c_i может принимать значения:

$$|1 + k(p-1)| \leq c_i \leq 1 \quad (33)$$

для частных и

$$|1 + k(p-1)| \leq c_i \leq 1 + k(p+1) \quad (34)$$

для кольцевых фаз затмения.

в) Обобщение формул. Введение в соответствующие места формул вспомогательной величины q позволяет свести вычисления ΔL_i для покрытий и прохождений к единому алгоритму:

$$\Delta L_i = \frac{2}{3} \phi_i q^2 (\cos^3 \gamma_{i+1} - \cos^3 \gamma_i) + [c_{i+1}^2 q^2 (\phi_i - \phi_{i+1}) + \left(\frac{k}{q}\right)^2 (\psi_i - \psi_{i+1}) - \delta (y_i - y_{i+1})] \overline{\cos \gamma_i}, \quad (35)$$

где

$$x_i = \frac{\delta^2 + c_i^2 q^2 - \frac{k^2}{q^2}}{2\delta}, \quad y_i = (c_i^2 q^2 - x_i^2)^{1/2} \quad (36)$$

координаты точек пересечения лимба затмевающей звезды $(x - \delta)^2 + y^2 = \frac{k^2}{q^2}$ с концентрическими окружностями $x^2 + y^2 = c_i^2 q^2$ диска

затмеваемой,

$$\phi_i = \arccos \cos \frac{x_i}{c_i q}, \quad \phi_{i+1} = \arccos \cos \frac{x_{i+1}}{c_{i+1} q}; \quad (37)$$

$$\psi_i = \arccos \cos \frac{q}{k} (\delta - x_i), \quad \psi_{i+1} = \arccos \cos \frac{q}{k} (\delta - x_{i+1}) \quad (38)$$

а $\cos \gamma_{i+1}$, $\cos \gamma_i$ по-прежнему задаются формулами (15).

Действительно, выражения (35–38) превращаются в рассмотренные выше формулы для покрытий при $q=k$ и в формулы для прохождений при $q=1$. Величина c_i в общем случае изменяется в пределах

$$\left| 1 + \frac{k}{q}(p-1) \right| \leq c_i \leq 1 \quad (39)$$

для частных (независимо от типа затмения) и

$$\left| 1 + \frac{k}{q}(p-1) \right| \leq c_i \leq 1 + \frac{k}{q}(p+1) \quad (40)$$

для кольцевых фаз затмения.

Алгоритм (35) применим ко всем без исключения полоскам. Однако при вычислении величин γ , ϕ , ψ для $i=1$ независимо от вида затмения и для $i=n$ во время кольцевых фаз машина может остановиться из-за появления под знаком квадратного корня небольшой отрицательной величины вместо нуля или из-за появления под знаком $\arccos$ величины, чуть большей единицы вместо единицы. Поэтому эти "опасные" места лучше обойти, приписав необходимым в (35) величинам заранее вычисленные и всегда одинаковые значения. Практическое содержание таких процедур показано в программе вычислений и в комментариях к ней.

г) Вычисление $\overline{\cos \gamma_i}$ и нарезание полосок. Истинное значение $\cos \gamma_i$ лежит в интервале значений $\cos \gamma_{i+1} > \overline{\cos \gamma_i} > \cos \gamma_i$, определяемых формулами (15). Конечная точность вычислений α будет неограниченно возрастать по мере увеличения числа колец, на которые разбивается диск затмеваемой звезды, независимо от способа задания $\overline{\cos \gamma_i}$. Однако, практический интерес представляют лишь такие способы, при которых для достижения заданной точности требуется возможно меньшее число разбиений.

Рассмотрим еще раз i -ую полоску (рис. 2). Если вырезать из нее интересующие нас площадки ABB' , $CC'D$ и сдвинуть их вместе, получится равнобедренная треугольная фигура, образованная дугами AB , CD и $AB' + C'D$. "Центр тяжести" ее излучения лежит на расстоянии $\overline{c_i} = \sin \gamma_i = (1 - \overline{\cos \gamma_i}^2)^{1/2}$ от центра диска, причем, как это следует из (16),

$$\overline{\cos \gamma_i} = \int_{S_i''} \cos \gamma d\sigma / S_i'' \quad (41)$$

Однако постоянное вычисление $\overline{\cos \gamma_i}$ по этой формуле означало бы возврат к тем же эллиптическим интегралам, от которых мы отказались. Основная идея данной работы как раз и заключается в том, чтобы задавать значение $\overline{\cos \gamma_i}$ в возможно более простом виде и в то же время достаточно точно. Погрешность в задании $\overline{\cos \gamma_i}$ отражается на числе необходимых разбиений, а вид формулы на простоте алгоритма (35). Обе эти стороны должны быть сбалансированы. Ценою усложнения формулы можно, конечно, добиться большей точности $\overline{\cos \gamma_i}$, а тем самым и сокращения числа разбиений. Но выигрыш в скорости вычислений на числе циклов не должен быть потерян в результате дополнительных вычислений, связанных с этим усложнением, иначе мы только удлиним программу, не получив никаких выгод. Как видно из этих рассуждений, задача о выборе оптимального способа задания $\overline{\cos \gamma_i}$ непростая, поэтому обсуждение возможных путей ее решения лучше отложить до накопления достаточного опыта работы с предложенным алгоритмом. А пока будем считать, что "центр тяжести" излучения фигуры $AB(C)D$ находится на расстоянии $\overline{c_i} = c_{i-1} + \frac{1}{3} (c_i - c_{i-1})$ от центра диска и следовательно в соответствии с формулами типа (15).

$$\overline{\cos \gamma_i} = \left\{ 1 - \left[c_{i-1} + \frac{1}{3} (c_i - c_{i-1}) \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (42)$$

Практическая проверка работы алгоритма (35) с участием этой формулы показала, что последняя достаточно точна и не требует слишком мелких разбиений диска затмеваемой звезды.

Конечная точность вычислений α , или число циклов, необходимых для получения заданной точности, зависят и от способа разбиения диска. Нарезание колец с постоянным шагом по y оказалось более выгодным по сравнению с разбивкой с постоянным шагом по c . Практически нарезание колец удобно осуществлять с помощью формулы

$$c_i = c_{i-1} + l \cos \frac{\pi}{2} (c_{i-1} - 0.10), \quad (43)$$

в которой константа 0.10 определяет минимальную величину шага Δc_i на краю диска. Число циклов вычислений при покрытиях зависит только от p , что позволяет при любых значениях отношения радиусов звезд обходиться одним и тем же значением l . Значение $l = 0.08$, дающее около 20 колец, с избытком обеспечивает точность в $D_{\alpha}^{\circ c}$ до 10^{-5} . Для получения такой же точности в случае прохождений необходимо постепенно уменьшать l от значения 0.08 при $k = 1$ до 0.04 при $k = 0.20$, что приводит к увеличению числа колец на затмеваемом диске с 20 до 40. Однако число колец, участвующих в циклах вычислений, в этом случае редко бывает полным, оно зависит не только от p , но и в сильнейшей степени от k .

д) Программа вычислений. Предлагаемая программа вычислений D_{α} предназначена для использования в режиме автоматического программирования на ЭВМ "Наири", в которых допускается блочная система нумерации операторов. Однако, она может быть использована и на других машинах "Наири", если пронумеровать по порядку все операторы и изменить соответственно адреса отсылок. Ее нетрудно переложить и на язык ЭВМ других типов. В программе использованы следующие обозначения: $a = k$, $b = q$, $p = p$, $\delta = \delta$, $o = L_2$ и $o = L_1$, $c = c_i$, $z = c_{i-1}$, $x = x_i$, $y = y_i$, $m = \phi_i$, $\Gamma = \phi_{i-1}$, $t = \psi_i$, $e = \psi_{i-1}$, $g = \cos^3 \gamma_i$, $l = \cos^3 \gamma_{i-1}$, $n = \sum \Delta L_i$, $щ = \cos \gamma_i$, $m = y_{i-1}$.

Предположим, что величины a , b , p заданы, причем $b = a$ для покрытий и $b = 1$ для прохождений. Перед входом в программу вычислений следует отсеять физически невозможные значения $p < -1/a$, положить $\alpha = 0$ при $p > 1$ и $\alpha = 1$ при $-1 \geq p \geq -1/a$ для покрытий.

1. Вычислим по формуле (11) значение L_2 и будем использовать его в дальнейшем при вычислении α , если $b < 1$; в противном случае вычислим по формуле (28) на эту же букву значение L_1 .

2. По формулам (1), (40) вычислим δ и пределы изменения c_i , найдем значения вспомогательных величин s и y в формулах (35), (36) с целью исключить их многократные вычисления в дальнейшем.

- 1 вычислим $0 = 2\pi a\alpha/3$
если $\beta < 1$ идти к 2
вычислим $0 = (12 a\alpha \sin \sqrt{a} - (12 + 8a - 32a\alpha)\sqrt{a(1-a)})/9$
- 2 вычислим $\delta = 1 + a\rho$
вычислим $c = 1 + a(\rho - 1)/\beta$
вычислим $\eta = c + 2a$
вычислим $s = 2\beta\beta/3$
вычислим $u = \delta\beta - (a/\beta)^2$
- 3 вычислим $x = c\beta$
допустим $\lambda = 0$ $c = 1$ $\eta = 0$ $m = 0$ $t = 0$ $\theta = 0$ $z = 0$ $r = 0$ $m = 0$ $y = 0$ $\lambda = 1$
если $x \geq 0$ идти к 4
допустим $m = \pi$
- 4 если $\beta < 1$ идти к 5
если $\eta < 1$ идти к 6
- 5 если $c < 1$ идти к 7
допустим $\rho = 2$ $c = 1$ $g = 0$
идти к 8
- 6 если $c < 4$ идти к 7
допустим $\rho = 2$ $c = 4$ $m = 0$ $y = 0$ $t = \pi$
вычислим $x = \delta + a$
- 7 вычислим $g = (\sqrt{1 - cc})^3$
если $\rho \neq 1$ идти к 9
- 8 вычислим $\ell = (\beta c)^2$
вычислим $x = (\eta + \ell)/2\delta$
вычислим $y = \sqrt{\ell - xx}$
вычислим $m = \arccos(x/\beta c)$
вычислим $t = \arccos((\delta - x)\beta/a)$
- 9 вычислим $u = \sqrt{1 - (z + (c - z)/3)^2}$
вычислим $n = n + m^3(\lambda - g) + ((\beta x)^2(m - r) + (a/\beta)^2(t - e) - \delta(y - m)) u$
если $\rho = 2$ идти к 11
- 10 допустим $\rho = 1$ $r = m$ $m = y$ $\lambda = g$ $z = c$ $e = t$ $\ell = (325)$
вычислим $c = c + \ell \cos((c - a/10)\pi/2)$
идти к 4
- 11 вычислим $x = n/0$

Рис. 3

3. Проведем первую окружность с радиусом $r_1 = c_1 q$. Она будет касаться лимба затмевающей звезды с внутренней стороны, если $c_1 = 1 + \frac{K}{q}(p-1) < 0$, и с наружной, если $c_1 > 0$. В первом случае потеря блеска с круга этого радиуса будет согласно (35) равна $\Delta L_1 = \frac{2}{3} \pi q^2 (1 - \cos^3 \gamma_1)$, а во втором $\Delta L_1 = 0$. Однако, как уже отмечалось, вычисление ряда величин в блоке 7 при первом заходе лучше обойти. Для этого примем заранее $c_0 = 0$, $y_0 = 0$, $x_1 = c_1 b$, $y_1 = 0$, $\phi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$, $l = 1$. Кроме того, введем $n = 0$, признак начала циклов вычислений ΔL_1 , очистим ячейку n , заслав туда нуль, и возьмем в соответствии с выражениями (39), (40) абсолютное значение c_1 . Величина же $\phi_1 = m$ должна быть положена равной 0, если $x \geq 0$, и π в противном случае.

4. Логические операции, в результате которых управление передается в блок 6 при кольцевых фазах затмения и в блок 5 при частных фазах независимо от типа затмения.

5. Блок работает только при частичном перекрытии дисков. Если кольца еще не исчерпаны ($c_i < 1$), управление передается в блок 7, в противном случае принимается $c = 1$, $g = 0$, вводится признак окончания циклов и управление передается в блок 8, поскольку величина g , обычно вычисляемая в блоке 7, уже задана.

6. Блок работает только при кольцевых фазах затмения. Если кольца не исчерпаны ($c < c_i$), управление передается в блок 7, в противном случае с целью обхода блока 8 принимается $c_n = c$, $x_n = \delta + a$, $y_n = 0$, $\phi_n = m = 0$, $\psi_n = t = \pi$ и вводится признак окончания циклов вычислений $n = 2$.

7, 8. По формулам (15), (36) — (38) вычисляются значения $\cos^3 \gamma_i$, x_i , y_i , ϕ_i , ψ_i и вспомогательная величина l , причем в начале циклов вычислений и в последнем цикле для кольцевых фаз блок 8 пропускается.

9. По формулам (35), (42) вычисляется очередное значение ΔL_i и на букве n происходит его суммирование с результатами вычислений в предыдущих циклах. При наличии признака $n = 2$ вычисления ΔL_i заканчиваются и управление передается в блок 11.

10. При отсутствии признака $n = 2$ организуется очередной цикл вычислений: вводится признак продолжения вычислений $n = 1$, а i значения необходимых величин переписываются на другие буквы, которые будут выступать в следующем цикле уже как $i - 1$ значения этих же величин. Затем по формуле (43), значение l в которой берется из ячейки 325, совершается очередной шаг по c_i и управление возвращается в блок 4.

11. Вычисление D_a и выход из программы.

Гипотеза x . Вычисление функций x_a^{oc} , x_a^{tr} , x_a^{ann} не является самостоятельной задачей. Как показал Цесевич (1940, 1947), значения этих функций зависят от соответствующих величин u_a и D_a :

$$x_a^{oc}(k, p) = \frac{3 - 3x}{3 - x} u_a^{oc} + \frac{2x}{3 - x} D_a^{oc} \quad (44)$$

$$x_a^{tr}(k, p) = \frac{1-x}{1-x+x\phi(k)} u_a^{tr} + \frac{x\phi(k)}{1-x+x\phi(k)} D_a^{tr} \quad (45)$$

Последняя формула пригодна и для вычисления значений $x_a^{ann}(k, p)$, если в ней положить $u_a^{ann}(k, p) = 1$. Выражениям (44) и (45) можно придать универсальный вид:

$$x_a(k, p) = (1-X) u_a(k, p) + X D_a(k, p), \quad (46)$$

полагая

$$X = \frac{2x}{3-x} \quad (47)$$

в случае покрытий и

$$X = \frac{x\phi(k)}{1-x+x\phi(k)} \quad (48)$$

в случае прохождений. Значение функции $\phi(k)$, представляющей собою отношение потерь блеска в момент начала кольцевых фаз при гипотезах D и U, может быть получено делением формулы (28) на πk^2 . Таким образом, для вычисления по формуле (46) величин $x_a(k, p)$ в вышеописанной программе необходимо сделать совсем небольшие изменения. В блоке 1 после вычисления каждой из величин $o = L_2$ и $o = L_1$ необходимо добавить вычисления по формулам (47) и (48) соответствующих значений X, а в блоке 11 добавить вычисление по формуле (8) значений функции u_a , используя для этого уже имеющиеся в блоках 6 и 8 величины m, t, x, y , полученные с признаком $n = 2$.

Краткие итоги и выводы.

1. Рассмотрены математические основы нового метода машинных вычислений фотометрических фаз затмения для круговых дисков с линейным законом потемнения к краю.

2. Формулы нового метода очень удобны для программирования: алгоритм вычислений оказался простым, кратким и универсальным.

3. Предложенный алгоритм можно использовать не только для вычисления функций α любых типов, но и их частных производных $\partial\alpha/\partial k, \partial\alpha/\partial p$.

4. Описанный алгоритм существенно облегчает использование ЭВМ для анализа кривых блеска затменных двойных систем. Его можно применять в любых методах такого анализа, но особенно он удобен в прямом методе и в частности в способе дифференциальных поправок в его машинном варианте (Лавров, 1971 б).

5. Новый метод вычисления функций α обладает большой гибкостью. Его легко распространить, например, на случай нелинейного закона потемнения к краю вида (Шульберг, 1971): $I/I_0 = 1-x'(1-\cos \gamma)^n - x''(1-\cos \gamma)^n$ при целочисленных значениях n . Небольшие усложне-

ния позволяют применять его и для моделей шар-эллипсоид и эллипсоид-эллипсоид с подобным расположением компонентов, а более значительные и при неподобном расположении компонентов в этих же моделях.

Литература:

1. Лавров М.И., 1971 а, АЦ №631, 4.
2. Лавров М.И., 1971 б, АЖ 48, 951.
3. Лавров М.И., 1972 — L a v r o v M.I., 1972 (in press), Proc. of Colloq. №16.
4. Линнел, 1965 — L i n n e l l A.P., 1965, ApJ Suppl 11, 185; 12, 288.
5. Линнел, 1966 — L i n n e l l A.P., 1966, ApJ Suppl 13, 413, 428, 445.
6. Линнел, 1970 — L i n n e l l A.P., 1970, Vistas in Astronomy, vol 12, 37.
7. Цесевич В.П., 1936, Труды Астрон. Обс. Ленинградского ун-та VI, 46.
8. Цесевич В.П., 1939, Бюлл. Астрон. Ин-та АН СССР №45, 115.
9. Цесевич В.П., 1940, Бюлл. Астрон. Ин-та АН СССР №50, 283.
10. Цесевич В.П., 1947, в книге: М. С.Зверев, Б.В. Кукаркин, Д.Я. Мартынов, П.П. Паренаго, Н.Ф. Флоря, В.П. Цесевич. Переменные звезды, том III: Методы изучения переменных звезд, Гостехиздат, М.—Л., глава VI.
11. Шульберг А.М., 1971, Тесные двойные звездные системы с шаровыми компонентами, "Наука", Москва, глава III.
12. Юркевич, 1970 а, б — J u r k e v i c h I., 1970, а, б, Vistas in Astronomy, vol. 12, 4, 63.

Кафедра астрономии
Казанского ордена Трудового Красного Знамени
Государственного университета им. В.И. Ульянова—Ленина
ноябрь, 1971

*Поступила в редакцию
1 декабря 1971г.*