ПЕРЕМЕННЫЕ ЗВЁЗДЫ

Том 17 №5(131) 1970

Распределение по z-координате переменных звезд типа RR Лиры. I. Методика.

Г. Г. Борзов.

В статье предлагается метод определения функции плотности объектов с учетом влияния на результаты селекции каталога. Получено выражение для функции селекции каталога, которое имеет вид:

$$\Phi(m_o') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{m_o - m_o'}{æ}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

где m_o – предельная видимая звездная величина для объектов каталога, m_o' – видимая звездная величина объектов, $æ^2$ – суммарная дисперсия ошибок измерений видимых звездных величин и отклонений поглощения света от средней статистической зависимости поглощения от расстояния. Задавая определенным образом поверхности равной плотности в Галактике, автор разрабатывает метод определения как функции пространственной плотности объектов, так и параметров $æ$ и m_o функции селекции каталога. Так как предлагаемый автором метод получения функции плотности основывается на решении системы нелинейных условных уравнений, то большое внимание уделяется способам оценки средних квадратических ошибок неизвестных. Предлагается метод их оценки. Описанную методику автор предполагает использовать при изучении распределения по z-координате переменных звезд типа RR Лиры.

z-coordinate Distribution of the RR Lyr Variables. I. Method.

By G. G. Borzov

Suggested is the method of determination of density function of objects with account of the catalogue selection upon the results. The expression of catalogue selection function is obtained. Its shape is

$$\Phi(m_o') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{m_o - m_o'}{æ}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

where m_o – the top stellar magnitude for catalogue objects, m_o' – apparent

stellar magnitude of the objects, $\ae^2$ – the summary dispersion of the errors in the measurements of the apparent stellar magnitudes and of the light absorption deviations from the average stochastic dependence upon the distance. Giving definite surfaces of equal density in the Galaxy the author is working out the method of determination of both the function of objects' density and the parameters $\ae$ and m_0 for the catalogue selection function. Attention is paid to the possibilities of the mean root errors estimation of the unknowns, because the suggested method is largely based upon the solution of the system of nonlinear conventional equations. The way of their estimation is given. The author suggests to use the above mentioned method for the study of the z-coordinate distribution of the RR Lyr variables.

Вопрос о функции распределения плотности различных объектов в Галактике является одним из наиболее актуальных вопросов современной звездной астрономии. Он тесно связан с проблемой изучения строения Галактики с точки зрения определения параметров функции распределения, характеризующих различные подсистемы Галактики, при допущении, что вид закона распределения для всех подсистем одинаков.

Все существующие в настоящее время методы определения функции пространственной плотности объектов можно разделить на две группы, которые определяются характером использованного материала. К первой группе можно отнести методы, применяемые к каталогам, которые содержат информацию, достаточную для определения светимости каждой звезды в отдельности. В этом случае возможно прямое определение функции плотности по подсчетам звезд в объемах, выбранных специальным образом. Учет влияния селекции каталога в этом случае состоит в определении радиуса сферы исчерпанности изучаемых объектов в каталоге. Радиус сферы исчерпанности объектов можно определить различными способами, на которых мы не будем останавливаться подробно.

Вторая же группа методов применяется обычно к материалу, который не позволяет определить светимость каждой отдельной звезды, и мы вынуждены для определения функции плотности задавать статистическую функцию распределения изучаемых объектов по светимостям. Обычно такой каталог состоит либо из одной площадки, либо из совокупности площадок, расположенных в различных участках небесной сферы и содержащих звезды до данной видимой величины m. В этом случае необходимо для каждой площадки решать первое интегральное уравнение звездной статистики, задавая соответствующим образом функцию светимости объектов. Для получения функции плотности по каталогам второго типа наиболее часто применяются схема Каптейна-Бока и ее модификации и метод Вашакидзе-Оорта. При использовании этой группы методов для определения функции плотности селекция каталога учитывалась лишь для переменных звезд различного типа. Подсчеты звезд обычно исправлялись за вероятность открытия переменных звезд соответствующего типа,и этим учет влияния селекции каталога исчерпывался.

В настоящей статье мы предлагаем метод определения функции плотности различных объектов для каталогов второго типа с учетом влияния на результаты селекции каталогов. Предлагаемый метод может применяться только к тем объектам, которые имеют малую дисперсию светимостей.

Предположим, что селекция каталога равна нулю. Тогда первое интегральное уравнение звездной статистики будет иметь вид:

$$A_o(m) = \omega\int_0^\infty D(r)\,\phi_o(M)\,r^2 dr, \tag{1}$$

где $A_o(m)$ – число звезд величины m в площадке, $D(r)$ – функция плотности звезд, $\phi_o(M)$ – функция светимости звезд, r – расстояние от Солнца, M – светимость, ω – телесный угол площадки. Индекс o у функций $A_o(m)$ и $\phi_o(M)$ означает, что эти функции не искажены селекцией каталога. Пусть $a_o(r)$ – средняя статистическая зависимость поглощения от расстояния, $a(r)$ – истинное значение поглощения для некоторой, выбранной нами звезды. Пусть, далее, m'_o – видимая звездная величина, которую имела бы звезда, если бы поглощение света для нее было равно среднему статистическому, а ошибка измерения видимой величины была равна нулю. Введем видимую звездную величину m', для которой поглощение света равно среднему статистическому, а ошибка измерения видимой величины не равна нулю. Пусть теперь m_o – предельная видимая звездная величина для объектов каталога. Для того, чтобы звезда с видимой звездной величиной m попала в каталог, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$m \leqslant m_o\ . \tag{2}$$

Так как флуктуация в видимой звездной величине m равна сумме флуктуаций в видимой звездной величине m' и в поглощении света a, то неравенство (2) можно переписать в виде

$$m - m'_o = m' - m'_o + a - a_o \leqslant m_o - m'_o\ . \tag{3}$$

Введем обозначение

$$t = m' - m'_o + a - a_o\ . \tag{4}$$

Пусть $f(t)$ – плотность вероятности величин t, то есть возможных отклонений величин m от величин m'_o для каждой звезды. Тогда вероятность для звезды светимости M попасть в каталог при фиксированном r определится из

$$\Phi(m'_o) = \int_{-\infty}^{m_o - m'_o} f(t)\,dt\ . \tag{5}$$

Таким образом, в каждом элементарном объеме пространства мы должны функцию светимости объектов умножить на вероятность попадания этих объектов в каталог, то есть

$$\phi(M) = \phi_o(M)\,\Phi(m'_o), \tag{6}$$

где $\phi(M)$ – функция распределения по светимости объектов, попавших в каталог. Если $A(m_o')$ – число звезд видимой звездной величины m_o' в каталоге, то первое интегральное уравнение звездной статистики запишется в виде

$$A(m_o') = \omega \int_0^\infty D(r)\,\phi_o(M)\,\Phi(m_o')\,r^2 dr\ . \tag{7}$$

Предположим, что функция $f(t)$ не зависит от расстояния. Тогда

$$A(m_o') = \omega\,\Phi(m_o') \int_0^\infty D(r)\,\phi_o(M)\,r^2 dr\ . \tag{8}$$

Очевидно, что каталог не будет иметь селекции только в том случае, когда он будет включать в себя все звезды любой видимой звездной величины. Это означает, что селекция каталога равна нулю только тогда, когда предельная видимая звездная величина m_o для объектов каталога стремится к бесконечности. В этом случае

$$\lim_{m_o \to \infty} \Phi(m_o') = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1, \tag{9}$$

так как интеграл по всей области задания от плотности вероятности равен 1. Тогда из выражения (8) получим

$$A_o(m_o') = \omega \int_0^\infty D(r)\,\phi_o(M)\,r^2 dr \tag{10}$$

и, следовательно,

$$A_o(m_o') = \frac{A(m_o')}{\Phi(m_o')}\ . \tag{11}$$

Таким образом, истинная функция $A_o(m_o')$ равна функции $A(m_o')$ для объектов каталога, деленной на функцию $\Phi(m_o')$. Функцию $\Phi(m_o')$ мы и будем в дальнейшем называть функцией селекции каталога. Так как величина t является суммой двух взаимно независимых случайных величин $m'-m_o'$ и $a-a_o$, то при известных законах распределения каждой из этих величин можно получить соответствующую формулу для функции селекции каталога. При практических вычислениях всегда можно принять, что величины $m'-m_o'$ распределены по нормальному закону. Если принять нормальный закон распределения и для отклонений поглощения от средней статистической зависимости поглощения света от расстояния, то получим

$$\Phi(m_o') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{m_o - m_o'}{\varkappa}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du, \tag{12}$$

где

$$u = \frac{t'}{\varkappa}\ . \tag{13}$$

В последних двух выражениях $\varkappa^2$ является дисперсией суммы случайных величин $m'-m_o'$ и $a-a_o$.

Анализ вида функций A(m) для реальных каталогов показал, что выражение (12) достаточно хорошо описывает вид функции селекции каталога. Для выделения из функции A(m) функции селекции каталога использовалась экстраполяция функции A(m) в область, где эта функция убывает. Затем наблюдаемые значения функции A(m) делились на значения функции A(m), полученные экстраполяцией, и, таким образом, определялась функция селекции каталога. Пусть $\Phi'(m)$ – функция селекции каталога, полученная указанным выше способом. Тогда каждому значению видимой величины m можно поставить в однозначное соответствие значение величины m_0' согласно (12), положив

$$\Phi'(m) = \Phi(m_0') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{m_0 - m_0'}{\varkappa}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \qquad (14)$$

Величины m и m_0' будут связаны между собой линейной зависимостью только в том случае, когда выражение (12) является аналитическим выражением для эмпирической функции селекции каталога. Для анализа вида функции селекции каталога использовались данные из работы [1]. Графики, построенные описанным выше способом, приведены на рис. 1. Для всех типов объектов точки на рис. 1 хорошо ложатся на прямые линии, несмотря на то, что значения эмпирической функции селекции каталога явно ошибочны, так как экстраполяция функции A(m) в область ее убывания не гарантирует нас от искажения экстраполируемых значений функции A(m) селекцией каталога. Таким образом, рис. 1 свидетельствует в пользу того, что формулу (12) можно использовать при практических вычислениях. В дальнейшем всюду под функцией селекции каталога мы будем иметь в виду выражение (12).

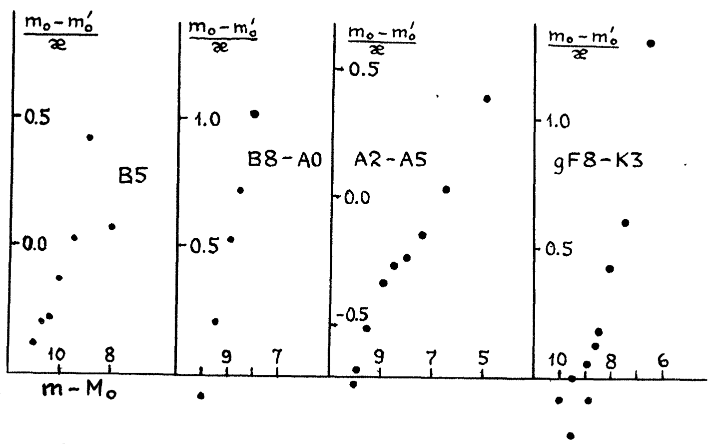

Рис. 1. Связь между эмпирической функцией селекции каталога и формулой (12).

Чтобы найти функцию плотности, нам нужно решать относительно нее интегральное уравнение (8), которое содержит две неизвестные функции, так как неизвестны параметры функции селекции каталога.

Кроме того, нужно задать функцию светимости объектов. Без дополнительных предположений о виде функции плотности задачу не удается решить до конца. Однако, если задать поверхности равной плотности в Галактике, то из уравнения (8) оказывается возможным получить как функцию плотности, так и параметры функции селекции каталога. Пусть поверхности равной плотности задаются соотношением

$$D(r, l, b) = h, \qquad (15)$$

где h – константа, определяющая семейство поверхностей равной плотности, l – галактическая долгота, b – галактическая широта. Решая последнее уравнение относительно r, получим

$$r = g(h, l, b). \qquad (16)$$

Последнее выражение позволяет определить расстояние в заданном направлении до соответствующей поверхности равной плотности, которая задается параметром h. Положим $h = h_j$, то есть зафиксируем поверхность равной плотности с номером j. Пусть i – номер площадки каталога. Тогда из (16) можно определить расстояние для площадки с номером i до поверхности равной плотности с номером j.

$$r_{ij} = g(h_j, l_i, b_i). \qquad (17)$$

Пусть $D(r_{ij})$ – значение функции плотности на расстоянии r_{ij}. Аналогичные значения функции плотности мы можем получить и для всех остальных площадок – при этом индекс j зафиксирован, то есть мы находимся на одной поверхности равной плотности. В этом случае должны выполняться равенства

$$D(r_{1j}) = D(r_{2j}) = \ldots = D(r_{ij}) = \ldots = D(r_{nj}), \qquad (18)$$

где n – число площадок в каталоге. Однако, для реального каталога равенства (18) не выполняются вследствие влияния селекции каталога. Таким образом, из равенств (18) можно получить систему условных уравнений относительно параметров функции селекции каталога и, решив ее, определить тем самым значение функции плотности на поверхности равной плотности с номером j. В то же время, чтобы получить равенства (18), нужно решить интегральное уравнение (8) относительно функции $D(r)$. Конечно, можно было бы воспользоваться основной идеей метода Вашакидзе-Оорта и привести интегральное уравнение (8) к одному какому-либо направлению. Тогда вместо равенств (18) можно было бы ввести соответствующие равенства для $A(m_0')$, но такое приведение интегрального уравнения к одному направлению выполнить невозможно для произвольного вида функции $g(h, l, b)$. Чтобы не ограничивать вид поверхностей равной плотности, мы в дальнейшем вынуждены основываться на равенствах (18) и решать интегральное уравнение (8) для произвольного вида поверхностей равной плотности.

В этой статье мы не будем подробно останавливаться на проблеме решения интегрального уравнения (8) для функции светимости произвольного вида. Укажем лишь, что для этой цели можно использовать схему Каптейна-Бока. Рассмотрим подробнее вопрос о применении нашей методики к объектам, которые имеют малую дисперсию светимостей. Пусть функция светимости объектов имеет следующий вид

$$\phi_o(M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(M-M_o)^2}{2\sigma^2}} \tag{19}$$

где σ^2 – дисперсия светимостей изучаемых объектов, M_o – средняя их светимость. Такой закон распределения по светимостям используется обычно на практике для объектов одной последовательности на диаграмме Герцшпрунга-Рессела и узкого интервала спектральных классов. Заметим, что

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(M-M_o)^2}{2\sigma^2}} = \delta(M-M_o), \tag{20}$$

где $\delta(M-M_o)$ – δ – функция. Отметим также, что подстановка в интегральное уравнение (8) вместо функции светимости (19) ее предела (20) позволяет легко проинтегрировать правую часть интегрального уравнения (8). Разумеется, при этом решение интегрального уравнения несколько отличается от истинной функции плотности. Для сравнения истинной функции плотности с решением интегрального уравнения, полученным путем замены функции светимости δ-функцией, соответствующие вычисления проводились на электронной вычислительной машине М-20 Вычислительного Центра МГУ. Расчеты производились следующим образом. По заданной функции плотности и функции светимости, взятой в виде (19), вычислялась функция $A(m)$, которая затем подставлялась в интегральное уравнение (8). Интегральное уравнение решалось путем замены функции светимости δ-функцией, и решение уравнения сравнивалось с исходной функцией плотности. Расчеты производились для нормального закона плотности объектов при различных параметрах толщины однородной атмосферы. Результаты приведены на рисунках 2 и 3. Из рисунков видно, что подмена нормального закона распределения объектов по светимостям δ-функцией даже при дисперсии светимостей равной $1^m.0$ приводит к малым искажениям функции плотности. По-видимому, эти различия гораздо меньше по величине, чем искажения, вызываемые селекцией каталога.

Подставив (20) в (8), получим

$$A(m'_o) = \omega \Phi(m'_o) D(r_o) c r_o^3, \tag{21}$$

где

$$c = \frac{1}{5\,\mathrm{Mod}}, \tag{22}$$

$$r_0 = e^{c\,(m'_0 + 5 - M_0 - a_0(r_0))} \tag{23}$$

Решая (21) относительно функции $D(r_0)$, получим

$$D(r_0) = \frac{A(m'_0)}{\Phi(m'_0)\,\omega\, c\, r_0^3} \tag{24}$$

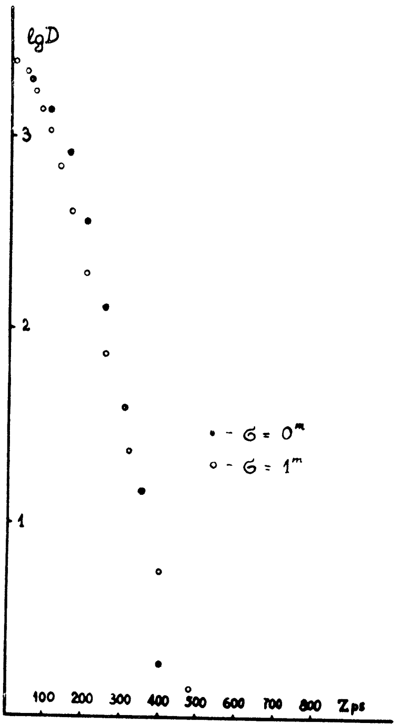

Рис. 2. Решения интегрального уравнения (8), полученные при $\sigma = 0^m$ и при $\sigma = 1^m$. Функция плотности задавалась в виде $D(z) = e^{-\frac{z^2}{\beta^2}}$ где $\beta = 148$ пс.

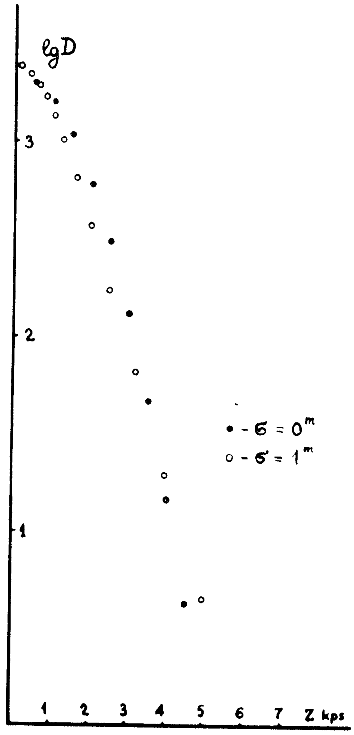

Рис. 3. Решения интегрального уравнения (8), полученные при $\sigma = 0^m$ и при $\sigma = 1^m$. $\beta = 1800$ пс.

Используя выражения (24) и (16), можно получить величины $D_{ij} = D(r_{ij})$ для каждого фиксированного h_j. Эти значения будут отличаться друг от друга как вследствие флуктуаций в $A(m'_0)$ для различных площадок, так и вследствие влияния селекции каталога. Однако, как можно видеть из рис. 4, на котором показаны вычисленные функции плотности звезд типа RR Лиры для трех значений галактической широты, функции плотности не совпадают и при $z = 0$, где селекция каталога практически не сказывается. Для расчетов использовались подсчеты звезд в гарвардских площадках [2]. Светимость переменных типа RR Лиры принималась равной 0.5, поглощение света учитывалось по работе [3]. Как показывает рис. 4, функции плотности, рассчитанные для различных широт или для различных площадок, отличаются друг от друга некоторыми множителями P_i. Чтобы исключить влияние этих множителей на определяемые из равенств (18) параметры функции селекции каталога, значения функции плотности, полученные в различ-

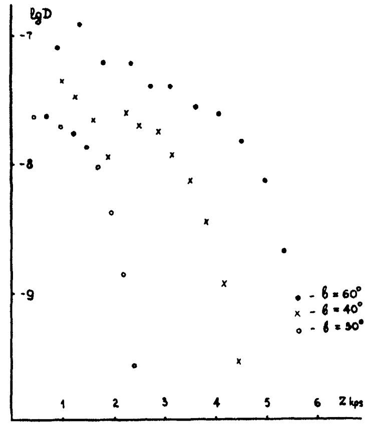

Рис. 4 Число звезд типа RR Лиры в 1 пс^3, рассчитанные для трех значений галактической широты.

ных точках поверхностей равной плотности, нужно привести к одной какой-либо площадке. Для этой цели достаточно ввести соответствующие множители P_i так, чтобы величины $\frac{D_{ij}}{P_i}$ при фиксированном j различались между собой только вследствие флуктуаций в $A(m'_0)$ для различных площадок и из-за влияния селекции каталога. Если селекция каталога учтена правильно и если множители P_i подобраны верно, то величины $\frac{D_{ij}}{P_i}$ будут распределены случайным образом относительно среднего значения. Введем в рассмотрение случайную величину

$$\frac{D_{ij}}{P_i} - \overline{\left(\frac{D_{ij}}{P_i}\right)} = \vartheta_{ij} , \tag{25}$$

где

$$\overline{\left(\frac{D_{ij}}{P_i}\right)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \frac{D_{ij}}{P_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ij}} \tag{26}$$

α_{ij} – веса. Математическое ожидание случайной величины ϑ_{ij} равно нулю. Очевидно, что мы имеем в данном случае nk условных уравнений вида

$$\vartheta_{ij} = 0; \quad i = 1,\dots n; \quad j = 1,\dots,k; \tag{27}$$

каждое из которых содержит $n+2$ неизвестных. Условные уравнения нелинейны. Любая система условных уравнений согласно принципу Лежандра должна решаться так, чтобы сумма квадратов невязок была наименьшей. Введем в рассмотрение функцию

$$F = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \vartheta_{ij}^2 . \tag{28}$$

Функция F является умноженной на 0.5 суммой квадратов невязок для системы неравновесных условных уравнений. Множитель 0.5 нам потребуется в дальнейшем. Минимум функции F достигается в тех же точках, что и у обычной суммы квадратов невязок для системы неравновесных условных уравнений. Пусть каким-либо образом мы нашли минимум функции F. Требуется по известным величинам α_{ij}, P_i, D_{ij} найти зависимость функции плотности от параметра h_j. Рассматривая величины $\frac{\alpha_{ij}}{P_i}$ как веса при величинах D_{ij}, получим, применяя формулу о среднем взвешенном

$$\overline{D(h_j)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_{ij}}{P_i} D_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_{ij}}{P_i}} = \frac{\overline{\left(\frac{D_{ij}}{P_i}\right)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_{ij}}{P_i}} \tag{29}$$

или

$$\overline{D(h_j)} = \frac{\overline{\left(\frac{D_{ij}}{P_i}\right)}}{\overline{\left(\frac{1}{P_i}\right)}} . \tag{30}$$

Если величины α_{ij} слабо отличаются друг от друга, то можно считать, что

$$\overline{\left(\frac{1}{P_i}\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \frac{1}{P_i}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P_i} . \tag{31}$$

Таким образом, зная точку минимума функции F, мы можем получить согласно (30) функцию плотности для всей последовательности значений h_j. В качестве оценки ошибки определения среднего значения плотности для каждого значения величины h_j можно использовать величину

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \vartheta_{ij}^2 \alpha_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} (n-1)}} . \tag{32}$$

Решать задачу об отыскании минимума функции F можно различными способами. Решение этой задачи соответствует решению системы нелинейных условных уравнений, причем линеаризацию этих условных уравнений путем разложения функции F в ряд по неизвестным производить не следует, так как начальное приближение может существенно отличаться от решения системы. Сходимость же процесса последовательных приближений гарантируется лишь в той области задания переменных, в которой минимизируемая функция не меняет направления выпуклости. Функция же F меняет направление выпуклости, так как имеет два минимума: в первой точке минимума функция $F \neq 0$, и все параметры принимают конечные значения, второй же минимум достигается при $P_i \to \infty$ для всех i, причем $F \to 0$. Чтобы исключить из рассмотрения не интересующее нас второе решение, нужно зафиксировать один из множителей P_i, а остальные считать переменными. Тогда при $P_i \to \infty$ для всех i, исключая зафиксированный множитель P_i, функция $F \to Const \neq 0$ и можно поставить задачу об отыскании абсолютного минимума для функции F во всей области задания переменных. Фиксирование одного из множителей P_i означает, что функции плотности, полученные для различных площадок, мы приводим к одной, выбранной нами площадке. Однако, линеаризация условных уравнений не гарантирует нам отыскания абсолютного минимума функции F даже при фиксировании одного из множителей P_i, так как начальное приближение может оказаться в такой области задания переменных, где обеспечивается сходимость процесса последовательных приближений ко второму минимуму функции F. Лучшие результаты при минимизации в нашем случае дает метод скорейшего спуска и другие методы.

Допустим, что каким-либо способом мы нашли минимум функции F. Следующей проблемой, которую нужно решить, является проблема определения средних квадратических ошибок полученных параметров. Это необходимо для того, чтобы результаты, полученные при применении методики, изложенной выше, можно было сравнивать с результатами, полученными другими авторами. Кроме того, определение средних квадратических ошибок неизвестных позволяет оценить достоверность полученных результатов. Отказ от линеаризации условных уравнений делает невозможным применение схемы Гаусса для отыскания минимума функции F, что создает трудности при оценке средних квадратических ошибок неизвестных. Однако, нетрудно показать, что применение схемы Гаусса для отыскания минимума функции F в сочетании с линеаризацией условных уравнений, также не решает вопроса об отыскании средних квадратических ошибок неизвестных. Пусть условные уравнения имеют вид

$$K_i - f_i(x, y, z) = 0; \quad i = 1, \ldots, n; \tag{33}$$

где x, y, z — неизвестные, f_i — дифференцируемые функции. Произведем линеаризацию условных уравнений

$$K_i - f_{oi} - \frac{\partial f_i}{\partial x}(x - x_o) - \frac{\partial f_i}{\partial y}(y - y_o) - \frac{\partial f_i}{\partial z}(z - z_o) = 0, \tag{34}$$

где $f_{oi} = f_i(x_o, y_o, z_o)$, а все производные вычисляются в точке x_o, y_o, z_o. Применив схему Гаусса для решения системы условных уравнений (34), получим значения $x-x_o$ $y-y_o$, $z-z_o$ и их средние квадратические ошибки. Введем обозначения

$$\begin{aligned} x - x_o &= \overline{x}_1 \\ y - y_o &= \overline{y}_1 \\ z - z_o &= \overline{z}_1 \end{aligned} \tag{35}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} x_1 &= x_o + \overline{x}_1 \\ y_1 &= y_o + \overline{y}_1 \\ z_1 &= z_o + \overline{z}_1 \end{aligned} \tag{36}$$

Подставив в (34) вместо x_o, y_o, z_o величины x_1, y_1, z_1 и снова решив систему, мы получим $\overline{x}_2$, $\overline{y}_2$, $\overline{z}_2$ и согласно (36) получим x_2, y_2, z_2. Применяя процесс последовательных приближений, получим окончательно

$$\begin{aligned} x_j &= x_o + \sum_{i=1}^{j} \overline{x}_i \\ y_j &= y_o + \sum_{i=1}^{j} \overline{y}_i \\ z_j &= z_o + \sum_{i=1}^{j} \overline{z}_i \end{aligned} \tag{37}$$

Решая систему (34), мы получаем для каждого $\overline{x}_i$ и величину его средней квадратической ошибки $\sigma_{\overline{x}_i}$. Однако, оценить среднюю квадратическую ошибку $\sigma_{\overline{x}_j}$ по известным средним квадратическим ошибкам $\sigma_{\overline{x}_i}$ трудно, так как величины $\overline{x}_i$ не являются взаимно независимыми. Требование взаимной независимости величин $\overline{x}_i$ противоречит условию сходимости процесса последовательных приближений. Однако, в [4], например, молчаливо принимается требование взаимной независимости величин $\overline{x}_i$ и приводится следующая формула для средней квадратической ошибки неизвестного

$$\sigma_{x_j} = \sqrt{\sum_{i=1}^{j} \sigma^2_{\overline{x}_i}} \tag{38}$$

Приведенная нами формула (38) обладает еще одним существенным недостатком. Окончательное значение средней квадратической ошибки неизвестного оказывается зависящим от величины начального приближения. В самом деле, пусть наше начальное приближение случайно совпало с первым приближением, то есть

$$\begin{aligned} x_o^1 &= x_1 \\ y_o^1 &= y_1 \\ z_o^1 &= z_1 \end{aligned} \tag{39}$$

Очевидно, что

$$x_j^1 = x_{j+1}$$
$$y_j^1 = y_{j+1} \qquad (40)$$
$$z_j^1 = z_{j+1}$$

Выпишем соответствующие выражения для средних квадратических ошибок величин $\sigma_{x_j^1}$ и $\sigma_{x_{j+1}}$

$$\sigma_{x_j^1} = \sqrt{\sum_{i=2}^{j+1} \sigma_{x_i}^2} \qquad (41)$$

$$\sigma_{x_{j+1}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{j+1} \sigma_{x_i}^2} \qquad (42)$$

Сравнивая между собой последние два выражения, получим

$$\sigma_{x_j^1} < \sigma_{x_{j+1}} \quad . \qquad (43)$$

Таким образом, чем дальше отстоит нулевое приближение от решения, тем больше средняя квадратическая ошибка решения, если ее определять по формуле (38). Такой вывод явно противоречит здравому смыслу, так как величина средней квадратической ошибки решения не должна зависеть ни от величины начального приближения, ни от числа сделанных приближений.

Так как введенная нами ранее функция F есть не что иное, как сумма квадратов невязок для неравновесных условных уравнений, умноженная на 0.5, то средняя квадратическая ошибка на единицу веса определится из

$$\sigma_0^2 = \frac{2F}{\ell - n - 1}, \qquad (44)$$

где ℓ — число уравнений, $n+1$ — число неизвестных, а функция F вычисляется в точке, координаты которой являются решением системы нелинейных условных уравнений. Пусть α_i — веса условных уравнений (33). Построим для них аналог функции

$$F^1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (k_i - f_i)^2 \qquad (45)$$

Или согласно (34)

$$F^1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[k_i - f_{oi} - \frac{\partial f_i}{\partial x}(x - x_o) - \frac{\partial f_i}{\partial y}(y - y_o) - \frac{\partial f_i}{\partial z}(z - z_o) \right]^2 . \qquad (46)$$

Из условия минимума функции F^1 получим систему нормальных уравнений

$$\frac{\partial F^1}{\partial x} = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (k_i - f_{oi}) \frac{\partial f_i}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)^2 \alpha_i (x - x_o) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial y} (y - y_o) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial z} (z - z_o) = 0 . \tag{47}$$

Это первое уравнение системы нормальных уравнений. Аналогично можно получить и остальные уравнения системы. Легко убедиться, что

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^2 F^1}{\partial x^2}, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial^2 F^1}{\partial x \partial y}, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial z} = \frac{\partial^2 F^1}{\partial x \partial z} . \tag{48}$$

Пусть B – матрица коэффициентов системы нормальных уравнений. Тогда

$$B = \begin{Vmatrix} F^1_{xx} & F^1_{xy} & F^1_{xz} \\ F^1_{yx} & F^1_{yy} & F^1_{yz} \\ F^1_{zx} & F^1_{zy} & F^1_{zz} \end{Vmatrix} \tag{49}$$

В матрице все величины являются соответствующими частными производными функции F^1. Веса неизвестных суть величины, обратные диагональным коэффициентам матрицы, обратной B. Таким образом, веса неизвестных являются функцией, зависящей только от вторых производных функции F^1. Так как все сказанное выше справедливо для любого значения начального приближения, то мы можем положить, что начальное приближение совпадает с искомым решением системы нелинейных условных уравнений. Тогда средняя квадратическая ошибка на единицу веса будет зависеть только от значения функции F^1 в минимуме, а веса неизвестных определятся из (49), где все вторые производные будут вычисляться в точке минимума функции F^1. Так как средняя квадратическая ошибка неизвестных в точке минимума функции не должна зависеть от значений неизвестных при предыдущих приближениях, то, следовательно, для любых значений неизвестных средняя квадратическая ошибка последних будет определяться согласно (44) и (49) и будет являться однозначной функцией значений неизвестных.

Таким образом, задачи минимизации F и определения весов неизвестных разделяются, и их можно решать независимо друг от друга. После того, как найден минимум функции F, любым численным методом нужно получить коэффициенты матрицы B и затем вычислить веса неизвестных.

Изложенная выше методика может применяться для получения функции плотности различных объектов с учетом влияния селекции каталогов. Отметим, что эту методику можно использовать для получения функции плотности как по z-координате, так и в плоскости Галактики — это зависит от вида задаваемых поверхностей равной плотности. Прежде всего, изложенный выше метод мы применим к переменным звездам типа RR Лиры.

Литература.

1. S. W. McCuskey, ApJ 123, 3, 458 – 478, 1956.
2. Б. В. Кукаркин, Докторская диссертация "Переменные звезды и строение звездных систем", 1946.
3. А. С. Шаров, АЖ 40, 900 – 911, 1963.
4. Б. М. Щиголев, "Математическая обработка наблюдений", "Наука", 1969, 248.

Гос. астрономический институт
им. П. К. Штернберга
сентябрь, 1970 г.