

К вопросу об определении орбит спектрально-двойных звезд

Е. Н. Макаренко

Предлагается способ определения предварительных элементов орбиты спектрально-двойной звезды по неполной кривой лучевых скоростей и способ их улучшения. Рассматриваются два примера вычисления элементов этим способом.

On Determination of the Orbits of the Spectroscopic Binaries Stars

E. N. Makarenko

The method of determination and improvement of the preliminary orbital elements for spectroscopic binary by using incomplete radial velocity curve is proposed. Two examples for determination of the elements by this method are examined.

1. Для определения элементов орбит спектрально-двойных звезд по кривым лучевых скоростей в разное время был предложен целый ряд методов [1], [2]. Все они требуют, чтобы кривая лучевых скоростей была покрыта наблюдениями по всей своей длине, и притом достаточно полно. Между тем зачастую наблюдения представляют не всю кривую, а лишь некоторую ее часть. В случае же затменно-переменных звезд нисходящая ветвь кривой как правило бывает искажена "эффектом вращения". Применение "классических" методов, в особенности тех, которые связаны с подсчетом площадей, в этих случаях является затруднительным.

Приближенный метод, предлагаемый ниже, позволяет провести определение элементов спектральной орбиты по неполной кривой лучевых скоростей (в частности — по ее восходящей ветви). Метод основан на использовании разложений по степеням эксцентриситета e , сходящихся достаточно быстро лишь при малых значениях e . Последнее сужает область применимости метода. Можно однако отметить, что спектрально-двойные звезды с эксцентриситетами, большими, чем 0.4, встречаются довольно редко. Использование предлагаемого метода наиболее оправдано в случае затменных звезд, где орбиты, как правило, характеризуются малой эксцентricностью, а кривые лучевых скоростей искажены "эффектом вращения".

2. Уравнение лучевой скорости звезды при ее орбитальном движении, как известно, имеет вид:

$$V = \gamma + \frac{na \sin i}{\sqrt{1-e^2}} [e \cos \omega + \cos(v+\omega)], \tag{1}$$

где

- γ — лучевая скорость центра масс системы,
- n — среднее суточное движение в орбите,
- a — большая полуось орбиты относительно центра масс,
- i — угол наклона,
- e — эксцентриситет орбиты,
- ω — долгота восходящего узла орбиты (отсчитывается от периастра в направлении движения звезды),
- v — истинная аномалия.

Уравнение (1) может быть записано в виде:

$$V = V_m + (K \cos \omega) \cos v - (K \sin \omega) \sin v, \tag{2}$$

где

$$V_m = \gamma + K e \cos \omega - \text{средняя лучевая скорость}, \tag{3}$$

$$K = \frac{na \sin i}{\sqrt{1-e^2}} - \text{полуамплитуда лучевых скоростей}. \tag{4}$$

Определению подлежат следующие элементы:

- период P (либо среднее движение n),
- момент T_0 прохождения через периастр,
- эксцентриситет e ,
- долгота узла ω ,
- величина $a \sin i$,
- скорость центра масс γ .

В случае знания периода (который получается более или менее точно при построении средней кривой лучевых скоростей) задача определения орбиты сводится к нахождению величин V_m , K , e , ω и Φ_0 (фаза прохождения через периастр, выраженная в долях периода).

3. Пусть $V_{\max}$ и $V_{\min}$ — экстремальные значения лучевой скорости (см. рис. 1). Очевидно, что:

$$V_m = \frac{V_{\max} + V_{\min}}{2}, \tag{5} \qquad K = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{2}. \tag{6}$$

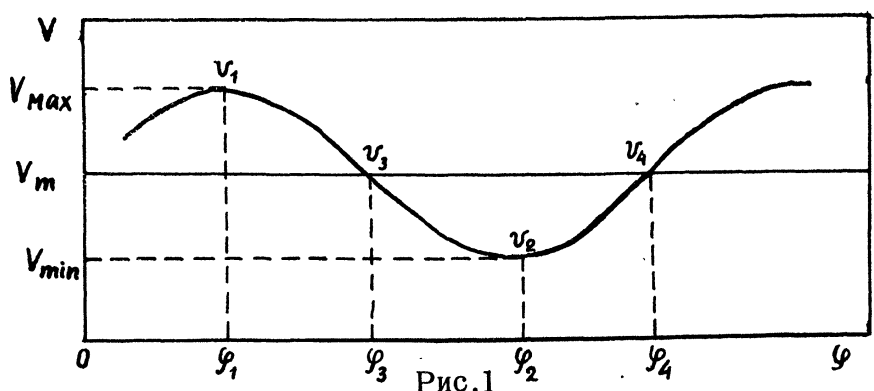


Рис.1

Лучевая скорость достигает экстремальных значений при прохождении звезды через восходящий и нисходящий узлы орбиты; при этом соответствующие истинные аномалии суть:

$$v_1 = -\omega, \quad v_2 = \pi - \omega \quad (7)$$

(соответствуют фазам ϕ_1 и ϕ_2 рис.1). Далее, очевидно, что при $V = V_m$

$$v_3 = \frac{\pi}{2} - \omega, \quad v_4 = \frac{3\pi}{2} - \omega \quad (8)$$

(соответствуют фазам ϕ_3 и ϕ_4 рис.1). Фазы ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 и ϕ_4 соответствующие экстремумам кривой лучевых скоростей и ее пересечениям со средней осью $V = V_m$ послужат основой для определения величин e , ω и Φ_0 , а потому должны быть сняты с возможно большей точностью с наблюдаемой кривой. В случае, если одна из фаз почему-либо не может быть уверенно определена, ограничиваемся фиксацией трех из них.

4. Для определения величин e , ω и Φ_0 используем известное разложение средней аномалии M по истинной v :

$$M = v + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{K} \beta (1 + K\sqrt{1-e^2}) \sin Kv. \quad (9)$$

Здесь

$$\beta = \frac{e}{1 + \sqrt{1-e^2}}; \quad (10)$$

разложение равномерно сходится при $e < 0.66274...$

Располагая (9) по степеням эксцентриситета, получим

$$M = v - 2e \sin v + \frac{3}{4}e^2 \sin 2v - \frac{1}{2}e^3 \sin 3v + \dots \quad (11)$$

Для фаз ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , ϕ_4 с точностью до вторых степеней эксцентриситета включительно можем записать:

$$M_1 = -\omega + 2e \sin \omega - \frac{3}{4}e^2 \sin 2\omega \quad (12)$$

$$M_2 = \pi - \omega - 2e \sin \omega - \frac{3}{4}e^2 \sin 2\omega \quad (13)$$

$$M_3 = \frac{\pi}{2} - \omega - 2e \cos \omega + \frac{3}{4}e^2 \sin 2\omega \quad (14)$$

$$M_4 = \frac{3\pi}{2} - \omega + 2e \cos \omega + \frac{3}{4}e^2 \sin 2\omega \quad (15)$$

Отсюда легко найти:

$$M_2 - M_1 = \pi - 4e \sin \omega \quad (16)$$

$$M_4 - M_3 = \pi + 4e \cos \omega \quad (17)$$

$$M_4 - M_2 = \frac{\pi}{2} + 2e \sin \omega + 2e \cos \omega + \frac{3}{2}e^2 \sin 2\omega \quad (18)$$

Для перехода от средних аномалий к фазам надо учесть, что

$$M = 2\pi(\phi - \Phi_0). \quad (19)$$

Далее мы будем различать следующие четыре случая:

1) Вся кривая лучевых скоростей является достаточно надежной. С учетом (19) из (16) и (17) находим:

$$e \sin \omega = \frac{\pi}{2} [0.5 - (\phi_2 - \phi_1)] \quad (20) \quad e \cos \omega = \frac{\pi}{2} [\phi_4 - \phi_3 - 0.5] \quad (21)$$

2) Надежной является восходящая ветвь кривой (уверенно определяются фазы ϕ_1 , ϕ_2 и ϕ_4). Величина $e \sin \omega$ попрежнему дается соотношением (20). Величину $e \cos \omega$ находим из соотношения (18), подставляя в него $e \sin \omega$ согласно (20):

$$e \cos \omega = \frac{2\phi_4 - \phi_2 - \phi_1 - 1}{3/4 + 2\pi - 3/2(\phi_2 - \phi_1)}. \quad (22)$$

3) Надежной является нисходящая ветвь кривой (уверенно определяются фазы ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3). $e \sin \omega$ дается соотношением (20), $e \cos \omega$ находим, беря разность $M_3 - M_1$ и подставляя в нее $e \sin \omega$ согласно (20):

$$e \cos \omega = \frac{\phi_1 + \phi_2 - 2\phi_3}{2\pi + 3/4 + 3/2(\phi_2 - \phi_1)}. \quad (23)$$

4) Известна полная кривая лучевых скоростей, но фаза максимума (ϕ_1) либо минимума (ϕ_2) скоростей не определяются с достаточной точностью. Фазы ϕ_3 и ϕ_4 определяются уверенно. В этом случае $e \cos \omega$ находим согласно (21), а $e \sin \omega$ — по одной из формул:

$$e \sin \omega = \frac{\phi_4 + \phi_3 - 2\phi_2}{2\pi - 3/4 + 3/2(\phi_4 - \phi_3)}, \quad (24)$$

$$e \sin \omega = \frac{1 + 2\phi_1 - \phi_3 - \phi_4}{2\pi + 3/4 - 3/2(\phi_4 - \phi_3)}. \quad (25)$$

Зная $e \cos \omega$ и $e \sin \omega$, однозначно определяем e и ω .

5. Описанный прием применим к орбитам с небольшими эксцентриситетами, т.к. он основан на использовании лишь трех первых членов разложения средней аномалии по истинной. В силу знакопеременности и равномерной сходимости этого разложения погрешность отбрасывания высших членов не превышает величины первого отброшенного члена.

В случае орбит с эксцентриситетами порядка 0.3–0.4, предварительные значения e и ω , найденные по формулам предыдущего параграфа, могут быть уточнены путем приближенного учета членов высших порядков в разложении M по v .

Пусть e_0 и ω_0 — приближенные значения, найденные одним из описанных выше способов. В соответствии с их определением можно записать:

$$e_0 \sin \omega_0 \equiv \frac{\pi}{2} [0.5 - (\phi_2 - \phi_1)] \quad (20')$$

$$e_0 \cos \omega_0 \equiv \frac{\pi}{2} [\phi_4 - \phi_3 - 0.5] \quad (21')$$

Далее, путем некоторых несложных преобразований вместо (9) получаем

$$M = v - 2e \sin v + 3!^2 \sin 2v - \frac{8}{3}!^3 \sin 3v + \left[\frac{5}{2} \sin 4v - 4 \sin 2v \right]!^4 - \left[\frac{12}{5} \sin 5v - 4 \sin 3v \right]!^5 + \dots, \quad (26)$$

где

$$l = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}}} \quad (27)$$

Совершенно аналогично предыдущему, переходы в (26) от M к v в соответствии с (19) и записывая это соотношение для фаз ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 и ϕ_4 , получаем:

$$e \sin \omega = \frac{\pi}{2} [0.5 - (\phi_2 - \phi_1)] - \eta(e, \omega) \quad (28)$$

$$e \cos \omega = \frac{\pi}{2} [\phi_4 - \phi_3 - 0.5] + \xi(e, \omega) \quad (29)$$

где

$$\eta(e, \omega) = \frac{4}{3} l^3 \sin 3\omega + \left(\frac{6}{5} \sin 5\omega - 2 \sin 3\omega\right) l^5 + \dots \quad (30)$$

$$\xi(e, \omega) = \frac{4}{3} l^3 \cos 3\omega + \left(\frac{6}{5} \cos 5\omega - 4 \sin 3\omega\right) l^5 + \dots \quad (31)$$

С учетом (20) и (21) можем записать:

$$e \sin \omega = e_0 \sin \omega_0 - \eta(e, \omega) \quad (32)$$

$$e \cos \omega = e_0 \cos \omega_0 + \xi(e, \omega)$$

Величины η и ξ играют роль поправок к первоначальным значениям $e \sin \omega$ и $e \cos \omega$. Считая эти поправки малыми, можно при их вычислении:

а) оборвать разложения (30) и (31) на членах, содержащих l в пятой степени;

б) подсчитывать их, используя приближенные значения e и ω .

Таким образом, последовательно получаем:

$$\left. \begin{aligned} e_0 \sin \omega_0 \\ e_0 \cos \omega_0 \end{aligned} \right\} \\ \left. \begin{aligned} e_1 \sin \omega_1 &= e_0 \sin \omega_0 - \eta(e_0, \omega_0) \\ e_1 \cos \omega_1 &= e_0 \cos \omega_0 + \xi(e_0, \omega_0) \end{aligned} \right\}$$

- и так далее.

Описанная процедура уточнения имеет смысл лишь в том случае, когда фазы ϕ_1 , используемые для нахождения e_0 и ω_0 , фиксируются достаточно надежно.

6. Зная величины V_m , K , e и ω , находим:

$$\gamma = V_m - K e \cos \omega \quad (33)$$

Значение Φ_0 получается из разложения (11), записываемого в виде

$$\Phi_0 = \phi - \frac{\gamma}{2\pi} + \frac{e \sin \gamma}{\pi} - \frac{3e^2 \sin 2\gamma}{8\pi} + \frac{e^3 \sin 3\gamma}{4\pi} - \dots \quad (34),$$

либо из аналогичного разложения (26):

$$\Phi_0 = \phi - \frac{v}{2\pi} + \frac{e \sin v}{\pi} - \frac{3l^2 \sin 2v}{2\pi} + \frac{4l^3 \sin 3v}{3\pi} - \left[\frac{5}{4\pi} \sin 4v - \frac{2}{\pi} \sin 2v \right] l^4 +$$

$$+ \left[\frac{6}{5\pi} \sin 5v - \frac{2}{\pi} \sin 3v \right] l^5 - \dots \quad (35)$$

Рассматривая, например, (34) при $\phi = \phi_1$, находим:

$$\Phi_0 \approx \phi_1 + \frac{\omega}{2\pi} - \frac{e \sin \omega}{\pi} + \frac{3e^2 \sin 2\omega}{8\pi} - \frac{e^3 \sin 3\omega}{4\pi}; \quad (36)$$

Совершенно аналогичное, но несколько более точное выражение можно получить из разложения (35).

7. Предварительные элементы основываются на трех (либо четырех) фиксированных точках. Естественно они не будут наилучшими в смысле представления наблюдаемой кривой. Эти элементы требуют улучшения. Улучшение может быть проведено по известному способу Шлезингера, заключающемуся в определении методом наименьших квадратов дифференциальных поправок ко всем элементам одновременно из разностей О-С, подсчитанных с помощью системы предварительных элементов.

Соответствующие вычисления, в особенности при учете весов наблюдаемых точек, являются очень трудоемкими, ибо требуют решения способом наименьших квадратов системы с пятью неизвестными. Кроме того, высокая точность, которую дает этот метод, может быть практически реализована лишь в случае очень большого числа наблюдаемых точек. При небольшом количестве наблюдений точность метода Шлезингера является кажущейся.

Ниже предлагается приближенный метод улучшения предварительных элементов. Он основан на сочетании метода наименьших квадратов с методом последовательных приближений. Суть способа заключается в том, что, опираясь все время на наблюдения, постепенно шаг за шагом повышают точность двух различных групп элементов.

В дальнейшем мы для простоты будем считать, что период известен достаточно точно (в случае затменных переменных, которые, главным образом, и имеет ввиду развиваемая методика, это действительно так). Таким образом улучшению подлежат следующие предварительные элементы:

$$V_{m0}, K_0, \omega_0, e_0, \Phi_{\infty}.$$

8. Разобьем элементы на две группы:

$$\begin{array}{ll} V_{m0}, K_0, \omega_0 & \text{I} \\ e_0, \Phi_{\infty} & \text{II} \end{array}$$

Фиксируя элементы второй группы и используя наблюдения, улучшим элементы первой группы: вычисляя для каждого момента наблюдения с помощью e_0 и Φ_0 соответствующие v_0 (здесь очень полезными могут оказаться таблицы Шлезингера [3]), и записывая для этих моментов

$$V_i^{\text{набл.}} = V_m + [K \cos \omega] \cos v_{i0} - [K \sin \omega] \sin v_{i0} \quad (37)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

по способу наименьших квадратов находим V_m , $K \cos \omega$ и $K \sin \omega$. Полученные V_{m1} , K_1 и ω_1 могут считаться более точными, чем исходные значения, ибо опираются они на все наблюдения. Однако здесь все же требуется дальнейшее улучшение, т.к. при подсчетах v_{i0} использованы грубые значения элементов второй группы.

Предварительные элементы второй группы улучшим, используя наблюдения и уже улучшенные элементы первой группы (т.е. V_{m1} , K_1 и ω_1). Варьируя известное соотношение

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \quad (38)$$

(E — эксцентрическая аномалия); окончательно находим:

$$\delta v = 2\pi \frac{(1+e \cos v)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \delta \Phi_0 + \sin v \frac{2+e \cos v}{1-e^2} \delta e \quad (39).$$

Записываем это соотношение для каждого момента наблюдения, принимая

$$\delta v = v_i^{\text{набл}} - v_i^{\text{выч}}, \quad (40)$$

где $v_i^{\text{выч}}$, также, как и коэффициенты при вариациях $\delta \Phi_0$ и δe , вычисляются для каждого момента с помощью предварительных значений e_0 и Φ_{00} , а $v_i^{\text{набл}}$ находятся из наблюдаемых лучевых скоростей с использованием уточненных элементов V_{m1} , K_1 и ω_1

$$v_i^{\text{набл}} = \arccos \frac{v_i^{\text{набл}} - V_{m1}}{K_1} - \omega_1 \quad (41)$$

Полученную систему

$$v_i^{\text{набл}} - v_i^{\text{выч}} = 2\pi \frac{(1+e_0 \cos v_{i0})^2}{(1-e_0^2)^{3/2}} \delta \Phi_0 + \sin v_{i0} \frac{2+e_0 \cos v_{i0}}{1-e_0^2} \delta e \quad (42)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

решаем по способу наименьших квадратов; находим поправки $\delta \Phi_0$ и δe и, соответственно,

$$\Phi_{01} = \Phi_{00} + \delta \Phi_0, \quad e_1 = e_0 + \delta e. \quad (43)$$

Далее весь цикл может быть осуществлен вторично: используя элементы $\Phi_{01}^{(1)}$ и e_1 , привлекая наблюдения, из (37) наименьшими квадратами находим второе приближение V_{m2} , K_2 и ω_2 . Это позволяет в свою очередь, в соответствии с (41) и (42) получить второе приближение Φ_{02} и e_2 — и т.д.

9. Отметим следующее обстоятельство. При подсчетах может оказаться, что, благодаря дисперсии наблюдаемых точек, в фазах, близких к максимуму (либо минимуму) скоростей

$$\left| \frac{v_i^{\text{набл}} - V_{m0}}{K} \right| > 1 \quad (44)$$

Соответствующие значения $v_i^{\text{набл}}$, даваемые формулой (41), не могут быть получены. Здесь приходится либо принимать $v_i^{\text{набл}} = -\omega$ ($\pi - \omega$),

либо проводить усреднение "выскакивающих" точек с точками, близкими по фазе и расположенными на той же ветви кривой скоростей. Отмеченное обстоятельство является крайне досадным, ибо нарушает цельность всего алгоритма, вводя в него некоторый произвол.

В целом же изложенный метод улучшения гораздо менее громоздок, чем метод Шлезингера: двукратное применение способа наименьших квадратов к системам, содержащим два и три неизвестных, является менее трудоемким, чем решение для случая пяти неизвестных.

10. В качестве примера рассмотрим определение орбит двух спектрально-двойных звезд:

1) Вычисление элементов орбиты спектрально-двойной GC 22276 ($\alpha_{1900} = 16^h 29^m.6$, $\delta_{1900} = +30^\circ 43'$) проводились в целях экспериментальной проверки предложенного метода. Выбор звезды определился тем, что она обладает малым эксцентриситетом орбиты, имеет хорошо наблюдаемые лучевые скорости, точно определенный период и элементы орбиты.

Звезда GC 22276 наблюдалась на астрофизической обсерватории Виктория в 1935 г. Найденные там и улучшенные по способу Шлезингера элементы суть:

$$P = 3^d 39 43 \pm 0^d 00 00 5$$

$$\gamma = -16.24 \text{ км/сек.}$$

$$e = 0.025$$

$$\omega = 355^\circ 23$$

$$K = 68.18 \text{ км/сек}$$

$$T = 2428061.493$$

$$a \sin i = 3181000 \text{ км}$$

$$\frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2} = 0.112 \odot$$

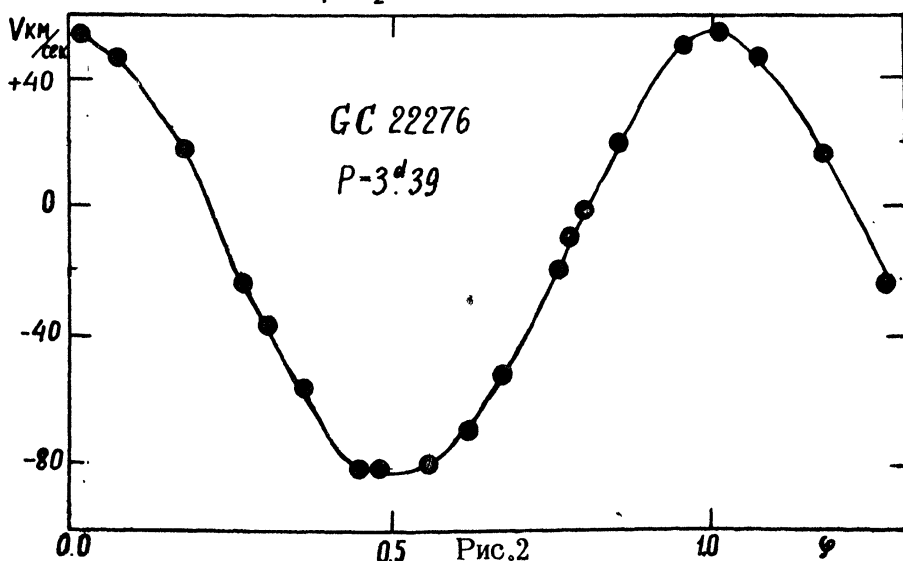


Рис.2

Для определения элементов новым методом использованы нормальные места, приведенные в публикациях обсерватории Виктория [4]. По-

строенная по ним кривая лучевых скоростей (рис.2) дает:

$$V_{\max} = +54 \text{ км/сек}$$

$$V_{\min} = -83 \text{ км/сек}$$

$$\phi_1 = 0.000$$

$$\phi_2 = 0.507$$

$$\phi_3 = 0.250$$

$$\phi_4 = 0.772$$

Найденные с помощью этих величин по формулам (5), (6), (20) и (36) предварительные элементы суть:

$$K^{\circ} = 68.5 \text{ км/сек}$$

$$e_0 = 0.035$$

$$\omega_0 = -17^{\circ}$$

$$V_m^{\circ} = -14.5$$

$$\Phi_0 = -0.0441$$

Эти элементы трижды улучшены по формулам (37), (41) и (42) с учетом весов.

Таблица 1.

Элементы	I приближение	II приближение	III приближение
K	67.83 км/сек	68.27 км/сек	68.35 км/сек
$\dot{V}_m$	-13.26	-14.76	-14.63
ω	-20°32	-22°47	-23°23
δe	-0.012	+0.002	+0.001
$\delta \Phi$	-0.0058	-0.0017	-0.0018
e	0.023	0.025	0.026
Φ	-0.0499	-0.0516	-0.0534

Полученные в результате трех приближений элементы представляют наблюдения так же хорошо, как и элементы обсерватории Виктория. Новые элементы дают $\sum_{i=1}^n p_i \Delta V_i = 0.566$ и $\sum_{i=1}^n p_i (\Delta V_i)^2 = 10.89$, в то время как для опубликованных элементов $\sum_{i=1}^n p_i \Delta V_i = 1.125$ и $\sum_{i=1}^n p_i (\Delta V_i)^2 = 11.01$. По полученным элементам найдены

$$a \sin i = 3 \ 187 \ 043 \text{ км}$$

$$\frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2} = 0.112 \odot$$

2) Описанным способом определялись элементы орбиты RW Tau по восходящей ветви кривой лучевых скоростей. Лучевые скорости, взятые из работы Хилтнера и Харди [5], сведены в 27 нормальных мест (табл.2).

Проведенная по ним кривая дала:

$$V_{\max} = +44 \text{ км/сек}$$

$$V_{\min} = -68 \text{ км/сек}$$

$$\phi_1 = 0.816$$

$$\phi_2 = 1.209$$

$$\phi_4 = 1.567$$

Таблица 2.

Фазы	Скорости	n	Фазы	Скорости	n	Фазы	Скорости	n
0 ^p .062	-46.4 км/сек	6	0 ^p .422	-43.5 км/сек	2	0 ^p .716	+34.9 км/сек	2
.088	-37.9	6	.460	-37.9	3	.732	+22.5	6
.133	-64.1	5	.478	-30.2	6	.747	+31.9	5
.154	-62.4	6	.497	-28.5	5	.771	+40.1	4
.199	-66.3	7	.517	-19.9	4	.816	+54.3	7
.275	-67.7	4	.555	-11.4	7	.845	+40.7	7
.298	-56.7	4	.571	-13.0	8	.892	+27.8	7
.354	-55.3	5	.589	- 9.9	3	.911	- 3.0	5
.375	-46.2	6	.627	- 3.8	4	.929	+ 3.9	5

Откуда по формулам (5), (6), (20), (22) и (36) получены предвари-
тельные элементы

$V_m^o = -12 \text{ км/сек}$
 $K_m^o = 56 \text{ км/сек}$
 $\omega_o = 50^{\circ}8$

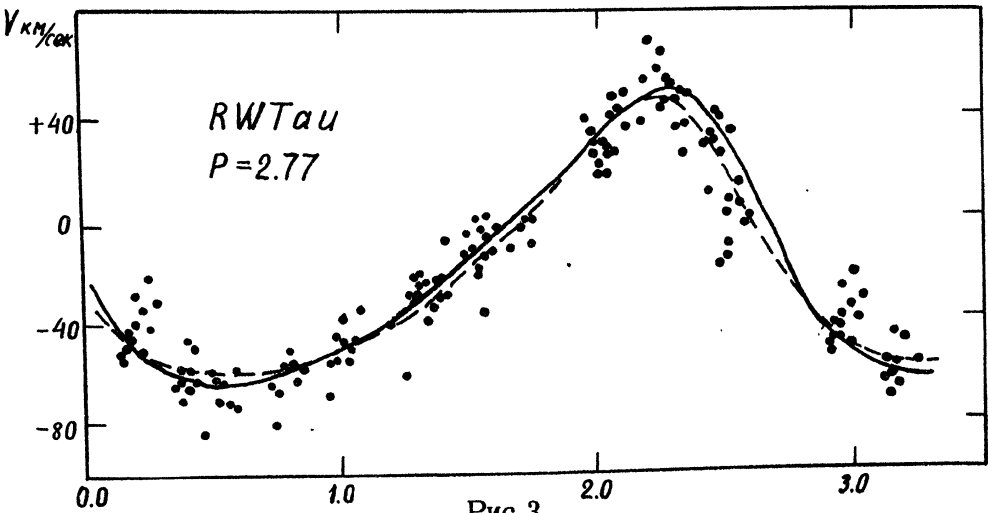
$e_o = 0.22$
 $\Phi_o = 0.909$
 $\gamma_o = -19.7$

Двукратное улучшение элементов велось с использованием точек,
лежащих на восходящей ветви (между фазами 0.119 и 0.771), по фор-
мулам (37), (41) и (42) с учетом весов. Получены элементы орбиты хо-
рошо представляющие всю кривую.

Таблица 3.

Элементы	I приближение	II приближение
V_m	- 10.22	- 8.340
K_m	54.869	56.671
ω	49 ^o .23	50 ^o .44
δe	0.048	0.002
$\delta \Phi$	0.005	0.000
e	0.268	0.270
Φ	0.914	0.914

На рис.3 сплошной линией дается кривая, соответствующая получен-
ным элементам. Пунктиром— кривая Хилтнера и Харди. Всплеск



скоростей на нисходящей ветви согласуется с гипотезой Хилтнера и Харди о существовании у $RW\tau$ потоков вещества.

Литература

1. Б. А. Воронцов-Вельяминов. Курс практической астрофизики, ГТТИ, М. - Л., 1940.
2. F. C. Henroteau, Handbuch der Astrophysik, Band VI, Chap. 4, 1928.
3. F. Schlesinger, Allegheny Publ., II, No. 17, 1912.
4. A. McKellar, Dominion Publ. VI, No. 16, 1935.
5. W. A. Hiltner, R. H. Hardie, ApJ **110**, No. 3, 1949.
6. М. Ф. Субботин. Курс небесной механики, т. II, ГТТИ, М. - Л., 1937.

Одесская астрономическая обсерватория,
декабрь 1961 г.