

ПЕРЕМЕННЫЕ ЗВЕЗДЫ

Приложение

Том 2, №11

1976

Поиск периодов переменных астрономических объектов с помощью ЭВМ М. М. Баско

Приводится описание и текст программы для ЭВМ БЭСМ-6. Программа создана на основе двух независимых алгоритмов и предназначена для отыскания периодов у переменных астрономических объектов.

Determination of Periods of Variable Astronomical Objects With the Aid of Computer by M. M. Basko

The description and the text of the program for the computer BESM-6 is presented. The program is created on the basis of two independent algorithms and is intended to determine the periods of variable astronomical objects.

Задача выявления периодичности в изменении блеска того или иного объекта по совокупности отдельных наблюдений давно известна в астрономии. Если блеск звезды (или другого какого-либо объекта) меняется строго периодически и амплитуда переменности превосходит ошибки наблюдений, то любой, более или менее опытный наблюдатель довольно легко устанавливает значение периода "на глаз" (если оно заключено в разумном интервале времени). Однако задача резко осложняется, если ошибки наблюдений становятся сравнимы с амплитудой переменности, или если блеск объекта подвержен сразу нескольким периодическим изменениям с различными значениями периодов. В этих случаях неоценимую помощь оказывают современные электронно-вычислительные машины (ЭВМ).

Применение ЭВМ теперь уже прочно вошло в практику при анализе кривых блеска переменных звезд (см., например, Холопов, 1970; Курочкин, 1973; Готтлиб и др., 1975). Однако в последнее время, в связи с открытием рентгеновских источников в тесных двойных системах, эта задача приобрела новую специфику, и на пути к ее решению возникли трудности. Дело в том, что поток излучения от многих рентгеновских источников меняется нерегулярным образом во всем интервале временной шкалы от долей секунды до многих дней и даже лет, причем амплитуда этих изменений очень велика. Естественно ожидать, что аналогичным флуктуациям может быть подвержен блеск оптических объектов, отождествленных с рентгеновскими источниками. И такая переменность действительно наблюдается в оптическом диапазоне у Sco X-1 и Cyg X-2. Ясно, что обнаружение регулярной переменности

на фоне таких хаотических флуктуаций, амплитуда которых может быть сравнима или даже превосходить амплитуду регулярных изменений, является нелегкой задачей. С другой стороны, как показывает пример источника Her X-1 (Геренд и др., 1974; Курочкин, 1975), оптическая кривая блеска двойных систем с рентгеновскими звездами наряду с основным периодом может иметь ряд менее ярко выраженных периодов, выявление которых может оказать существенное влияние на понимание физической природы таких систем. Появление этих новых аспектов означает, что, во-первых, особое внимание следует уделить выбору алгоритма, используемого при нахождении периодов, и критерия достоверности, на основании которого делается вывод, что в изменении блеска присутствует регулярная компонента с тем или иным значением периода. Во-вторых, необходимо значительно увеличить объем наблюдательных данных, подвергаемых обработке, что в свою очередь заставляет нас использовать самые последние достижения вычислительной техники.

Приведенная ниже программа поиска периодов написана на языке АЛГОЛ-60, точнее на той его модификации, которая была недавно создана для мониторинг системы "Дубна". Она основана на двух независимых алгоритмах, первый из которых описан в работе Юркевича (1971), а второй — в работе Курочкина (1973). В рамках каждого алгоритма дается оценка вероятности того, что тот или иной период случаен. Отметим, что совпадение результатов, даваемых каждым из этих алгоритмов по отдельности, есть один из критериев достоверности найденных периодов. Ниже мы кратко остановимся на каждом из этих алгоритмов.

Алгоритм 1.

Выбор наилучших значений периода из заданного интервала производится методом перебора. Для каждого из перебираемых значений периода P наблюдательные данные $m_i = m(t_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$; $m = m(t)$ — звездная величина) сворачиваются по модулю P ; другими словами, вычисляются фазы

$$\phi_i = \frac{t_i - t_0}{P} - \text{ENTIER} \left(\frac{t_i - t_0}{P} \right). \quad (1)$$

Здесь t_0 — некоторый момент времени, не превышающий ни одного из значений t_i ; $\text{ENTIER}(x)$ — наибольшее целое число, не превышающее x . Из (1) следует, что $0 < \phi_i < 1$. Интервал значений фаз $0 < \phi < 1$ разбивается на L равных частей, для каждой из которых вычисляются величины

$$m_k = \frac{1}{N_k} \sum_i m_i, \quad (2)$$

$$V_k = \sum_i (m_i - m_k)^2, \quad (3)$$

где $k = 1, 2, \dots, L$; N_k — число значений фазы ϕ_i , попавших в интервал $\frac{k-1}{L} < \phi_i < \frac{k}{L}$. Суммирование в (2) и (3) производится лишь по тем i , для которых $\frac{k-1}{L} < \phi_i < \frac{k}{L}$. Период P считается тем достовернее,

чем меньше величина

$$D(P) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^L V_k \quad (4)$$

Интуитивно понятно, что если P — истинный период, то в пределе $N \gg L \gg 1$ величина $D(P)$ есть средний квадрат отклонения от кривой блеска.

Для оценки вероятности принимается следующая нулевая гипотеза:

а) звездная величина m представляет собой нормально распределенную случайную величину с дисперсией σ^2 ; б) все измерения m_i независимы друг от друга. В рамках этой гипотезы величина

$$S = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N (m_i - \bar{m})^2 \quad (5)$$

имеет χ^2 — распределение с $N-1$ степенями свободы, а величина ND/σ^2 χ^2 — распределение с $N-L$ степенями свободы. В (5) введено обозначение

$$\bar{m} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i. \quad (6)$$

Если S и D определяются из независимых выборок, то отношение

$\frac{S(N-L)}{DN(N-L)}$ имеет ν^2 — распределение с $N-1$ и $N-L$ степенями свободы. Вероятность, которая вычисляется в программе — есть вероятность того, что в рамках нулевой гипотезы $\nu^2(N-1, N-L) > S/ND$, причем для простоты полагается $\nu^2(N-1, N-L) \approx \nu^2(N-1, N-1)$, поскольку на практике всегда $N \gg L$.

Алгоритм II

Этот алгоритм отличается от предыдущего лишь тем, что для каждого значения периода P вычисляется не величина $D(P)$, а

$$A(P) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (7)$$

где

$$\alpha = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^L \sin\left(\pi \frac{2k-1}{L}\right) \sum_i (m_i - \bar{m}) \quad (8)$$

$$\beta = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^L \cos\left(\pi \frac{2k-1}{L}\right) \sum_i (m_i - \bar{m}) \quad (9)$$

В (8) и (9) внутреннее суммирование производится по тем значениям i , для которых $\frac{k-1}{L} < \phi_i < \frac{k}{L}$. Коэффициенты α и β имеют простой наглядный смысл; если фазы ϕ_i (см. (1)) распределены в интервале $0 < \phi < 1$ равномерно, то в пределе $N \gg L \gg 1$ функция

$$\mu(t) = \bar{m} + \alpha \sin\left(2\pi \frac{t}{P}\right) + \beta \cos\left(2\pi \frac{t}{P}\right)$$

даст наилучшее приближение к $m(t)$ в классе функций вида $f(t) = f_0 + a \sin\left(2\pi \frac{t}{P}\right) + b \cos\left(2\pi \frac{t}{P}\right)$ с произвольными значениями f_0 , a и b . Период P считается тем достовернее, чем больше величина $A(P)$.

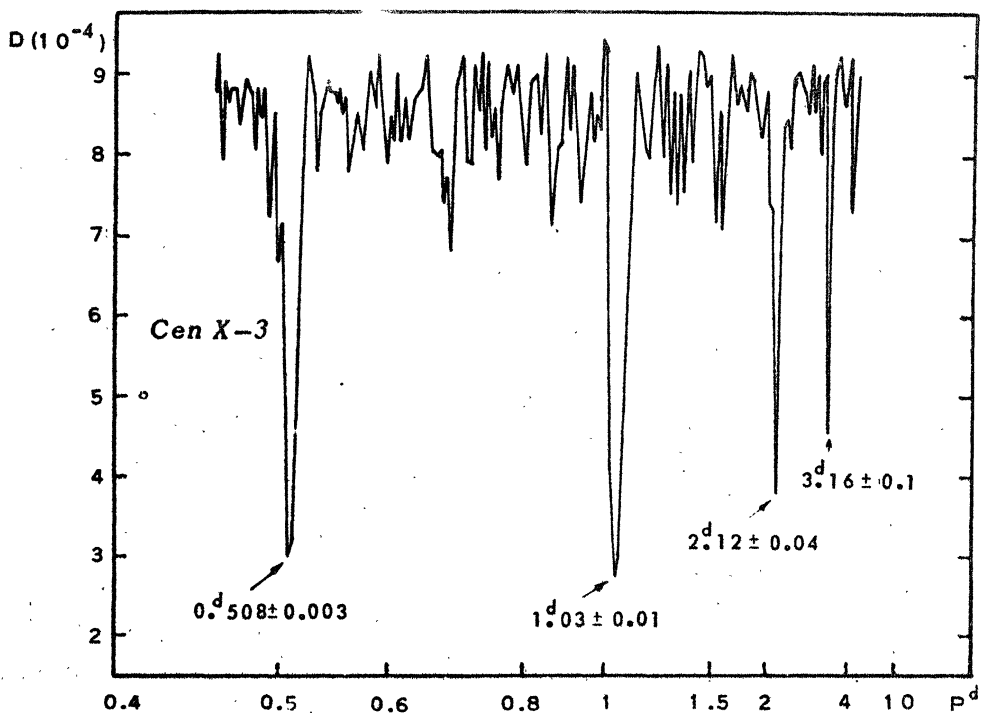


Рис. 1. Пример определения периода двойной системы, включающей рентгеновский пульсар Cen X-3, согласно алгоритму I. Поиск периода производился в интервале $0^d.2 < P < 20^d$. Истинный период равен $2^d.087$, а оптическая кривая блеска имеет вид двойной волны. Число наблюдений $N = 41$, интервал наблюдений JD 2442073 – 2442092.

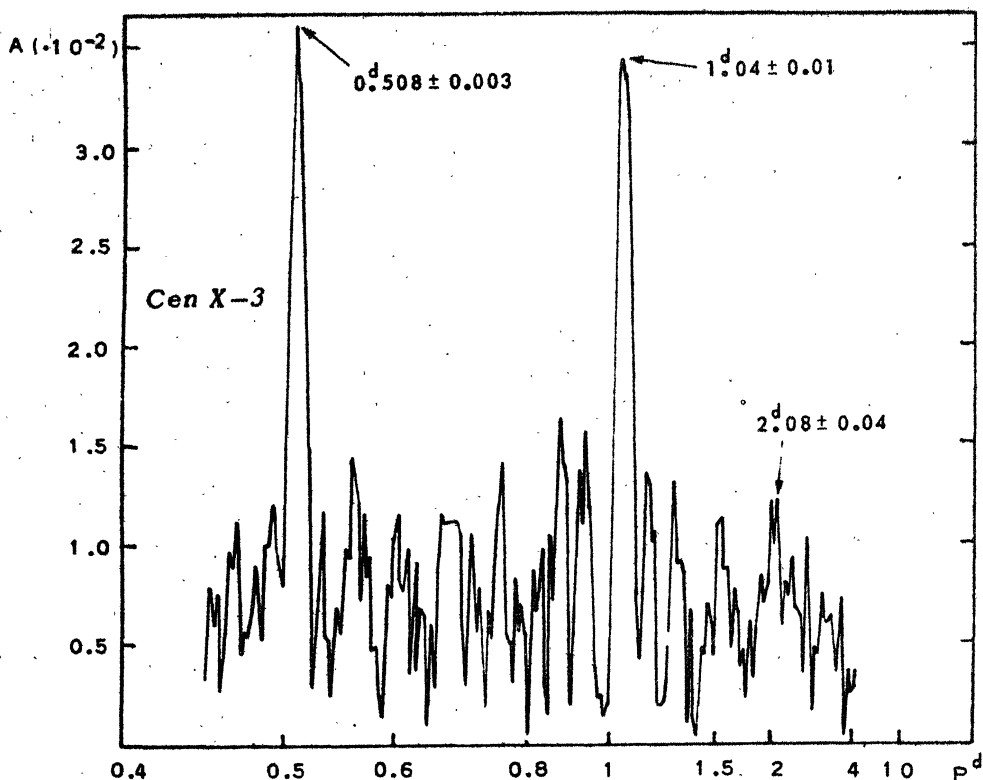


Рис. 2. Пример определения периода согласно алгоритму II. Наблюдения те же, что и на рис. 1.

При оценке вероятности в качестве нулевой гипотезы принимается, что а) звездная величина m есть нормально распределенная случайная величина; б) все измерения m_i независимы друг от друга; в) фазы измерений ϕ_i распределены по интервалу $0 < \phi < 1$ равномерно, т.е. $N_k = N/L$; г) выполняются соотношения

$$\sum_{k=1}^L \sin^2 \left(\pi \frac{2k-1}{L} \right) = \sum_{k=1}^L \cos^2 \left(\pi \frac{2k-1}{L} \right) = \frac{L}{2} \quad (10)$$

$$\sum_{k=1}^L \sin \left(\pi \frac{2k-1}{L} \right) \cos \left(\pi \frac{2k-1}{L} \right) = 0. \quad (11)$$

В рамках этих предположений величина $N^2 A^2 / 2S$ имеет χ^2 -распределение с двумя степенями свободы. В программе вычисляется значение вероятности

$$\text{PROB}(\chi^2 > N^2 A^2 / 2S) = \exp(-N^2 A^2 / 4S). \quad (12)$$

Отметим, что в данном алгоритме нулевая гипотеза содержит гораздо более жесткие предположения, чем в алгоритме I, поэтому, оцениваемая в рамках этой гипотезы вероятность имеет более условный смысл.

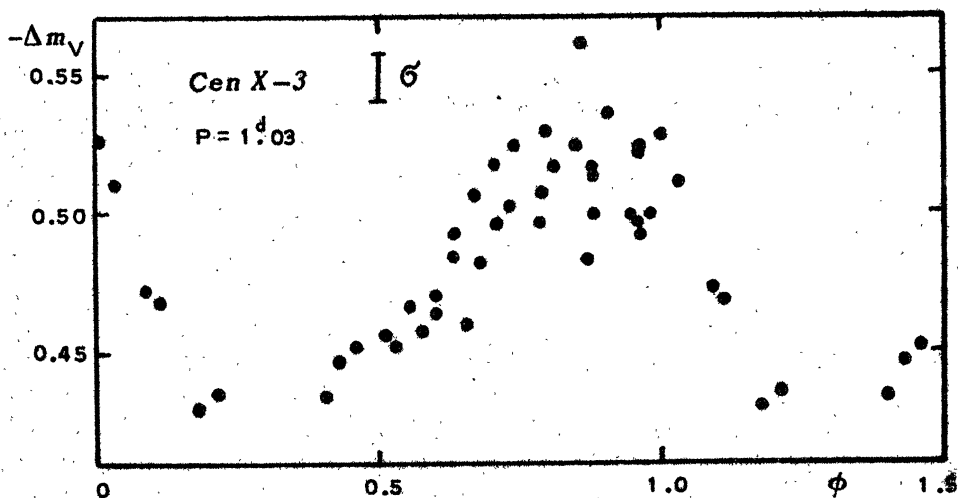


Рис. 3. Наблюдательные данные, свернутые с периодом $P = 1.03$.

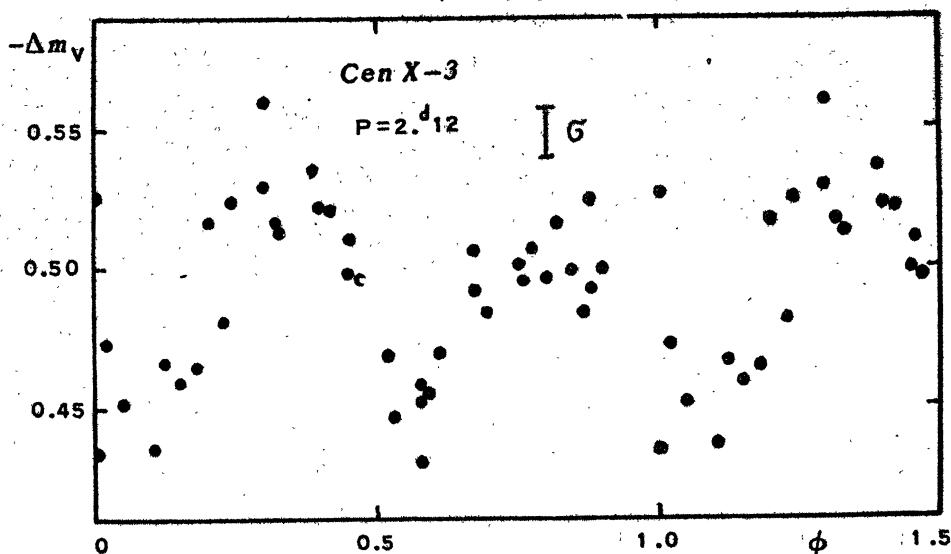


Рис. 4. Наблюдательные данные, свернутые с периодом $P = 2.12$.

Работа описанной ниже программы продемонстрирована на примере оптической звезды, отождествленной с рентгеновским пульсаром Cen X-3 (К шеминьский, 1973). Кривая блеска этой звезды имеет вид двойной волны с периодом $2^d.087$ и амплитудой переменности $\Delta m_v \sim 0^m.15$. В качестве начальных данных, подвергнутых обработке, были использованы фотоэлектрические наблюдения Петро (1975) (41 точка, снятая на протяжении 20 дней). Результаты расчетов представлены на рис. 1 и 2. Четко выделяются два периода: $P_1 = 1^d.04$, равный половине истинного периода, и сопряженный период

$$P_2 = \frac{1}{1 + 1/P_1} = 0^d.51.$$

Алгоритм I кроме того дает значительные всплески для периодов $P_3 = 2P_1$ и $P_4 = 3P_1$. Причина этого состоит в том, что алгоритм I, в отличие от алгоритма II, наряду с истинным периодом P всегда фиксирует кратные периоды nP , где целое число $n < L$. Однако, с увеличением n достоверность кратных периодов падает, и период LP уже невозможно отличать от фона. Чтобы в данном примере в качестве истинного выделился период $2P_1$, необходимо увеличить число наблюдений и уменьшить их погрешность и это хорошо видно из рис. 3 и 4.

Краткое описание программы

В качестве начальных данных используются значения 9 формальных параметров:

1) $PMIN, PMAH, N, L, IND, M, M1, MP, MFP$;

и массивы начальных данных:

2) $T[1:N]$ — моменты наблюдений (N чисел),

3) $D[1:N]$ — звездные величины (N чисел);

4) если $IND = 3$, то дополнительно вводится массив $PM[1:MFP]$ значений периодов, для которых нужно вычислить фазы ϕ_i .

Индикатор IND служит для указания, какая часть программы должна отработать. Если $IND = 1$, то сначала периоды ищутся согласно алгоритму I, а затем — согласно алгоритму II; если $IND = 2$, то наоборот. Если $IND = 3$, то для каждого значения периода из массива PM вычисляются фазы ϕ_i ($i = 1, 2, \dots, N$), усредненная кривая блеска, коэффициент A (согласно выражениям (7)–(9), эпоха минимума и амплитуда переменности.

Периоды ищутся в интервале $PMIN < P < PMAH$. Интервал фаз $0 < \phi < 1$ разбивается на L равных частей. Периоды перебираются с шагом

$$\Delta\left(\frac{1}{P}\right) = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{\Delta t}, \text{ где } \Delta t \text{ — интервал времени, охватываемый наблюдениями.}$$

В процессе перебора через каждые MP значений периода на печать выводятся $M1$ наиболее достоверных, выбранных из числа последних просмотренных MP значений. При этом печатаются также соответствующие значения D (алгоритм I) или A (алгоритм II). По окончании работы каждого алгоритма на печать выводятся M наиболее достоверных периодов с соответствующими значениями вероятности, и величины D (или A), а затем MFP из этих периодов обрабатываются точно также, как и массив значений периодов PM при $IND = 3$.

Скорость счета по данной программе в каждом конкретном случае можно оценить, зная, что на обработку каждого из перебираемых значений периода по любому из двух алгоритмов требуется $N \cdot 10^{-4}$ сек машин-

ного времени на ЭВМ БЭСМ-6. Например, для обработки по одному из алгоритмов $N=1000$ наблюдений, охватывающих интервал $\Delta t=3000$ дней, вплоть до $PMIN=0.2 \ll PMAX$ с $L=6$ требуется около $\frac{1000 \times 3000 \times 6}{0.2} \times 10^{-4} \text{ сек} = 2.5$ часов на машине БЭСМ-6.

Текст программы

- | | |
|--|---|
| 1. 'BEGIN'REAL'PMIN, PMAX; 'INTEGER'
N, L, IND, LM, M, M1, MP, MFP; READ (PMIN,
PMAX, N, L, IND, M, M1, MP, MFP); LM:= L-1; | Ввод значений
формальных
параметров |
| 2. PRINT ("PMIN=", PMIN, "PMAX=", PMAX,
"N=", N, "L=", L, "IND=", IND,
NEWLINE, "M=", M, "M1=", M1, "MP=",
MP, "MFP=", MFP, NEWLINE); | Вывод значений
формальных
параметров |
| 3. 'BEGIN'ARRAY'T[1:N], D[1:N], F[1:N],
S[0:LM], C[0:LM], PM[1:M], DM[1:M],
PM1[1:M1], DM1[1:M1], PROB[1:M]; 'REAL'
TO, TM, R1, R2, R3, SO, SS, PN, PS, PP, DI,
PNMAX, DT; 'INTEGER'ARRAY'NM[0:LM];
'INTEGER'I, J, K, KP; | |
| 4. 'REAL'PROCEDURE'TERF(X); 'REAL'X;
'IF'ABS(X)<2'THEN'TERF:= .5-.3989*X*(1-
X*X/6+X**4/40-X**6/462)'ELSE'TERF:=
.3989*(1-1/X**2+3/X**4)*EXP(-X*X/2)/X; | |
| 5. READ(T, D); 'PRINT'("(10F12.5)", T;
'PRINT'("(12F10.5)", D;
T0:=1.0\$18; TM:=T0; 'FOR'I:=1
'STEP'1'UNTIL'N'DO'BEGIN'
'IF'T[I]<T0'THEN'TO:=T[I]; 'IF'T[I]>TM
'THEN'TM:=T[I]'END'; DT:=TM-T0;
PRINT(NEWLINE, "TMIN=", TO, "TMAX=", TM); | Ввод, вывод на
печать и предвари-
тельная обработка
моментов наблюде-
ний и звездных
величин |
| 6. PNMAX:=DT/PMIN; PS:=1/L; SO:=SS:=0;
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'BEGIN'
T[I]:=(T[I]-TO)/DT; SO:=SO+D[I]'END';
SO:=SO/N; 'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
'BEGIN'D[I]:=D[I]-SO; SS:=SS+D[I]**2'END';
SS:=SS/N; PRINT("SO=", SO, "SS=", SS); | |
| 7. 'IF'IND=1'THEN'GOTO'WO;
'IF'IND=2'THEN'GOTO'WWO; GOTO'WPO; | Развилка |
| 8. WO:PN:=DT/PMAX-PS; KP:=1; PP:=PMAX;
'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO' DM[K]:=
PM[K]:=1.0\$18; 'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'
M1'DO'DM1[K]:=PM1[K]:=1.0\$18;
PRINT(NEWLINE, NEWLINE, "
PROGRAM OF JURKEVICH");
PRINT(NEWLINE, "SPECTRUM PLOT"); | Алгоритм I |

9. W1:PN:=PN+PS; 'FOR' K:=0 'STEP' 1 'UNTIL'
LM'DO' 'BEGIN' S[K]:=0; NM[K]:=0 'END';
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N'DO' 'BEGIN'
R1:=PN*T[I]; K:=ENTIER((R1-
ENTIER(R1))*L); S[K]:=S[K]+D[I];
NM[K]:=NM[K]+1 'END'; R1:=0; 'FOR' K:=0
'STEP' 1 'UNTIL' LM'DO' IF' NM[K]' NE' 0
'THEN' R1:=R1+S[K]**2/NM[K]; DI:=SS-R1/N;
10. K:=0; W2:K:=K+1; 'IF' D<DM[K] 'THEN'
'GOTO' W4; 'IF' K<M 'THEN' 'GOTO' W2;
'GOTO' W5; W4: 'FOR' I:=0 'STEP' 1 'UNTIL'
M-K-1'DO' 'BEGIN' DM[M-I]:=DM[M-I-1];
PM[M-I]:=PM[M-I-1] 'END'; DM[K]:=DI;
PM[K]:=DT/PN;
11. W5:K:=0; W6:K:=K+1; 'IF' D<DM1[K]
'THEN' 'GOTO' W7; 'IF' K<M1 'THEN'
'GOTO' W6; 'GOTO' W8; W7: 'FOR' I:=0 'STEP' 1
'UNTIL' M1-K-1'DO' 'BEGIN' DM1[M1-I]:=DM1[M1-I-1];
PM1[M1-I]:=PM1[M1-I-1]
'END'; DM1[K]:=DI; PM1[K]:=DT/PN;
12. W8:KP:=KP+1; 'IF' KP>MP 'THEN' 'GOTO' W9;
'IF' PN<PNMAX 'THEN' 'GOTO' W1;
13. W9:KP:=1; R1:=DT/PN; PRINT(NEWLINE,
NEWLINE, R1, "<P<"; PP); PP:=R1;
PRINT(NEWLINE, "PERIODS:", NEWLINE,
PM1, NEWLINE, "DISPERSIONS:", NEWLINE,
DM1); 'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' M1'DO'
DM1[K]:=PM1[K]:=1.0\$18; 'IF' PN<PNMAX
'THEN' 'GOTO' W1;
14. 'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' M'DO' 'BEGIN'
'IF' DM[K]>0 'THEN' R1:=.5*(LN(SS)-
LN(DM[K]))*SQRT(N-1) 'ELSE' R1:=1.00;
PROB[K]:=TERF(R1) 'END';
PRINT(NEWLINE, NEWLINE, "*****");
15. PRINT(NEWLINE, "M BEST PERIODS", PM,
NEWLINE, "THEIR DISPERSIONS", DM,
NEWLINE, "AND THEIR PROBABILITIES",
PROB); 'GOTO' WPO;
16. WWO: PRINT(NEWLINE, NEWLINE, " Алгоритм II
PROGRAM OF KUROCHKIN"); PRINT(NEWLINE,
"SPECTRUM PLOT"); PN:=DT/PMAX-PS;
KP:=1; PP:=PMAX; 'FOR' K:=0 'STEP' 1 'UNTIL'
LM'DO' 'BEGIN' R1:=6.2832*(.5+K)/L;
S[K]:=SIN(R1); C[K]:=COS(R1) 'END';
'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' M'DO' DM[K]:=PM[K]:=-1.0\$18; 'FOR' K:=1 'STEP' 1
'UNTIL' M1'DO' DM1[K]:=PM1[K]:=-1.0\$18;

17. WW1:PN:=PN+PS;R2:=R3:=0;'FOR'I:=1
'STEP'1'UNTIL'N'DO'BEGIN'R1:=PN*T[I];
K:=ENTIER((R1-ENTIER(R1))*L);R2:=R2+
S[K]*D[I];R3:=R3+C[K]*D[I]'END';
DI:=2*SQRT(R2**2+R3**2)/N;
18. K:=0;WW2:K:=K+1;'IF'DI>DM[K]
'THEN'GOTO'WW4;'IF'K<M'THEN'
'GOTO'WW2;'GOTO'WW5;WW4:'FOR'I:=0
'STEP'1'UNTIL'M-K-1'DO'BEGIN'
DM[M-I]:=DM[M-I-1];PM[M-I]:=PM[M-I-1]
'END';DM[K]:=DI;PM[K]:=DT/PN;
19. WW5:K:=0;WW6:K:=K+1;'IF'DI>DM1[K]
'THEN'GOTO'WW7;'IF'K<M1'THEN'
'GOTO'WW6;'GOTO'WW8;WW7:'FOR'I:=0
'STEP'1'UNTIL'M1-K-1'DO'BEGIN'DM1[M1-
I]:=DM1[M1-I-1];PM1[M1-I]:=PM1[M1-I-1]
'END';DM1[K]:=DI;PM1[K]:=DT/PN;
20. WW8:KP:=KP+1;'IF'KP>MP'THEN'GOTO'WW9;
'IF'PN<PNMAX'THEN'GOTO'WW1;
21. WW9:KP:=1;R1:=DT/PN;PRINT(NEWLINE,
NEWLINE,R1,"<P<","PP);PP:=R1;
PRINT(NEWLINE,"PERIODS:");NEWLINE,
PM1,NEWLINE,"SIN AMPLITUDES:",
NEWLINE,DM1);'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'
M1'DO'DM1[K]:=PM1[K]:=-1.0\$18;'IF'
PN<PNMAX'THEN'GOTO'WW1;
22. 'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO'
PROB[K]:=EXP(-.25*N*DM[K]**2/SS);
PRINT(NEWLINE,NEWLINE,"****");
23. PRINT(NEWLINE,NEWLINE,"M BEST PERIODS",
PM,NEWLINE,"THEIR SIN AMPLITUDES",DM,
NEWLINE,"AND THEIR PROBABILITIES",
PROB);GOTO'WPO;
24. WPO:KP:=IND;IND:=100;'IF'KP=3'THEN'
READ(PM);PRINT(NEWLINE,"****");
'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'MFP'DO'
'BEGIN'PN:=DT/PM[J];'FOR'K:=0'STEP'1
'UNTIL'LM'DO'BEGIN'S[K]:=0;NM[K]:=0
'END';'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
'BEGIN'R1:=PN*T[I];F[I]:=R1-ENTIER(R1);
K:=ENTIER(L*F[I]);S[K]:=S[K]+D[I];
NM[K]:=NM[K]+1'END';'FOR'K:=0'STEP'1
'UNTIL'LM'DO'IF'NM[K]NE'0'THEN'
S[K]:=S[K]/NM[K];R1:=1.0\$18;R2:=-R1;

Перебор периодов,
вычисление A (P)

Выбор M наилучших
периодов.

Выбор M1 лучших
периодов.

Проверка условия
выхода на печать.
Печать M1 лучших
периодов.

Вычисление веро-
ятности.

Вывод на печать
M лучших периодов.

Вычисление пара-
метров кривой
блеска.

```

'FOR'K:=0'STEP'1'UNTIL'LM'DO"BEGIN'
'IF'S[K]<R1'THEN'R1:=S[K];'IF'S[K]>R2
'THEN"BEGIN'R2:=S[K];R3:=TO+PM[J]*
(.5+K)/L'END"END";R1:=R2-R1;
PRINT(NEWLINE,NEWLINE,"LIGHT CURVE
FOR P=",PM[J],"AMPLITUDE=",R1,
"MINIMUM EPOCH=", R3,NEWLINE,S,
NEWLINE,NM,NEWLINE,"BEST SIN
AMPLITUDE=");'FOR'K:=0'STEP'1
'UNTIL'LM'DO"BEGIN'R1:=6.2832*
(.5+K)/L;S[K]:=SIN(R1);C[K]:=COS(R1)
'END';R2:=R3:=0;'FOR'I:=1'STEP'1
'UNTIL'N'DO"BEGIN'K:=ENTIER(L*F[I]);
R2:=R2+S[K]*D[I];R3:=R3+C[K]*D[I]
'END';R1:=SQRT(R2**2+R3**2);DI:=
2*R1/N;'IF'R1<1.0$-16'THEN"GOTO'WP1;
R2:=R2/R1;R3:=R3/R1;'IF'ABS(R2)<
1.0$-18'THEN'R1:=.25-.25*SIGN(R3)
'ELSE'R1:=.5-.25*SIGN(R2)-ARGTAN(R3/R2)
/6.2832;R1:=TO+R1*PM[J];WP1:
PRINT(0I,"MINIMUM EPOCH OF SIN=",
R1,NEWLINE,"PHASES",NEWLINE);
'PRINT'""(15F8.4)"";'END'J;
'IF'KP=1'THEN"GOTO'WW0;'IF'KP=2
'THEN"GOTO'WO;PRINT(NEWLINE,
"FINISH")'END"END"EOP'

```

Автор благодарен Р.А.Сюняеву за постановку задачи и многочисленные полезные обсуждения.

Литература:

- Холопов П. Н., 1970, Труды ГАИШ 40, 72.
 Курочкин Н. Е., 1973, ПЗ 19, 117.
 Готтлиб и др., 1975 — Gottlieb E.W., Wright E.L., Liller W., ApJ., 195, L33.
 Геренд и др., 1974 — Gerend D., Deeter J., Grosa L., Boynton P.E., preprint.
 Курочкин Н. Е., 1975, Письма в АЖ (в печати).
 Юркевич, 1971 — Jurkevich I., Ap.Sp.Sci., 13, 154.
 Кшеминьский, 1973 — Krzemiński W., IAU Circ., No. 2612.
 Петро, 1975 — Petro L.D., ApJ 195, 709.

Институт Космических исследований
 АН СССР

Поступила в редакцию
 5 июня 1975 г.

ДОПОЛНЕНИЕ.

Предложенный ранее для алгоритма I способ оценки вероятности дает завышенные (слишком пессимистические) значения, поскольку значения S и D определяются по одной и той же выборке, а не по двум независимым. Опыт работы с описанной программой показал, что луч-

шую оценку вероятности можно получить, если воспользоваться отношением $\frac{S - ND}{S} \frac{N - 1}{L - 1}$, которое имеет ν^2 -распределение с $(L - 1,$

$N - 1)$ степенями свободы. Дело в том, что в рамках нулевой гипотезы

при $N > L$ и $|\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}| > \frac{1}{t_{\max} - t_{\min}}$ значения величины $(S - ND)$, (имеющей

χ^2 -распределение с $L - 1$ степенями свободы), вычисленные для двух значений периода p_1 и p_2 , можно считать независимыми. Тогда веро-

ятность того, что $\nu^2 (L - 1, N - 1) > \frac{S - ND(p)}{S} \frac{N - 1}{L - 1}$, умноженная на

число независимых периодов $(\frac{1}{p_{\min}} - \frac{1}{p_{\max}})(t_{\max} - t_{\min})$, дает разумную

оценку вероятности того, что найденный в интервале $p_{\min} < p < p_{\max}$ минимум функции $D(p)$ является чисто случайным.

*Дополнение поступило
в редакцию
9 января 1976 г.*