

О точности определения элементов затменных двойных систем

А.М.Шульберг, В.П.Мурникова

Излагается способ вычисления ошибок элементов затменных систем при решении их кривых блеска методом Рассела—Меррилла. Применение разработанного способа иллюстрируется двумя примерами: найдены элементы и их ошибки систем S Cnc и YZ Cas.

On the Precision of Determination of Eclipsing Binaries Elements

by A.M.Schulberg, V.P.Murnikova

A method of computation of errors of eclipsing binaries elements in solving their light curves by Russell—Merrill method is given. The use of this method is illustrated by two examples: the elements and their errors of the systems S Cnc and YZ Cas are found. Quite satisfactory results are obtained.

Методы определения элементов затменных двойных систем можно разделить на две группы, в зависимости от того, нужно или не нужно для применения того или иного из них, строить сглаженную кривую блеска системы.

Отнесем к первой группе методы, для применения которых необходимо построение сглаженной кривой. В эту группу входят метод Рассела и его различные модификации, метод Фетлаара с его модификациями (Шнеллера, Цесевича и др.), метод решения кривых блеска затменных звезд с протяженными атмосферами (Шульберг, 1947) и другие.

Во вторую группу войдут, очевидно, методы, для применения которых сглаженная кривая блеска не нужна. Такими методами являются, например, метод Копала—Пиотровского, методы дифференциальных поправок, метод минимизирующей суммы (Табачник, Шульберг, 1965) и др.

Такая на первый взгляд странная классификация оправдывается одним важным обстоятельством. Дело в том, что принадлежность метода к той или иной группе в этой классификации, означает также

возможность или невозможность вычисления ошибок элементов системы при решении задачи данным методом. Так, например, решая задачу каким-нибудь методом второй группы, мы можем вычислить и ошибки элементов исследуемой системы. Скажем, применение метода Копала—Пиотровского или метода Табачника дает возможность найти средние ошибки элементов, возникающие из-за неточности данных наблюдений и несовершенства метода. Метод дифференциальных поправок дает средние ошибки элементов в зависимости от $\Delta l = l_{ab} - l_c$ нормальных точек кривой блеска.

Что касается методов первой группы, то, как известно, их применение вообще не позволяет найти ошибки элементов затменных систем. Это обстоятельство несомненно снижает ценность всех этих методов.

Между тем, такой, например, метод первой группы, как метод Рессела—Меррилла (Рессел и Меррилл, 1952) — очень прост и дает достаточно точные значения элементов (в смысле — достаточно малые $|O-C|$, см. Шульберг, 1971, §27). Во многих случаях решение задач методом Рессела—Меррилла не нуждается в улучшениях, так как $|O-C|$ оказываются не больше ошибок нормальных точек кривых блеска. В таких случаях возможность вычисления ошибок решения приобретает особенно большое значение.

По нашему мнению, если бы при решении кривых блеска затменных систем методом Рессела—Меррилла можно было получать и ошибки элементов систем, этот метод в обычных случаях следовало бы предпочесть всем другим.

Авторам данной работы удалось найти способ вычисления ошибок элементов затменных систем при решении задачи любым методом из первой группы. Ниже излагается этот способ при решении кривой блеска методом Рессела—Меррилла для случаев полного и кольцеобразного затмений (случай частного затмения будет рассмотрен в следующей статье).

Предварительно укажем, какие именно ошибки мы будем определять.

Во-первых, в отличие от методов второй группы, наш способ дает не средние ошибки элементов, а предельные (которые, как известно, приблизительно в три раза больше средних).

Во-вторых, применение данного способа позволяет найти ошибки возникающие из-за неточности наблюдений и несовершенства метода вычислений элементов, но не ошибки, возникающие из-за несоответствия модели. Эти последние не удастся пока найти ни одним методом.

В-третьих, здесь рассматривается пока только модель сферических компонентов затменных систем.

Перейдем к изложению способа вычисления предельных ошибок элементов затменных систем, при решении их кривых блеска методом Рессела—Меррилла.

Обычно, определяя элементы затменной системы методом Рессела—Меррилла мы строим сглаженную кривую блеска. Выбираем на ней точки, соответствующие определенным значениям α_i (0.05, 0.10, 0.20,...). Находим абсциссы θ_i этих точек (из чертежа) и вычисляем величины зависящих от $\sin^2 \theta_i$ функций $M_n[\sin^2 \theta]$ и $R(k)$. Из таблицы значений функции $R(k)$ (Меррилл, 1950) находим параметр k и вспомогательные функции $M_n[\psi]$ и затем вычисляем параметры r_1 , r_2 и i .

Для того, чтобы найти ошибки элементов r_1 , r_2 и i нужно, очевидно, знать ошибки, с которыми вычислены параметр k и функции $M_n[\psi]$, а для этого должна быть известна ошибка $R(k)$. Ошибка же функции $R(k)$ зависит от ошибок значений $\sin^2 \theta_i$, т.е., от ошибок, с которыми определены фазовые углы θ_i . К сожалению, ни метод Рессела—Меррилла, ни любой другой метод первой группы не дает ошибок фазовых углов θ_i . Значения θ_i получаются из чертежа как абсциссы выбранных на сглаженной кривой блеска точек, соответствующих определенным величинам фотометрических фаз α_i . Величины α_i , вообще говоря, не совпадают со значениями α_i нормальных точек; поэтому ошибки ординат l_i и абсцисс θ_i точек сглаженной кривой неизвестны.

Чтобы избавиться от этой неопределенности мы решили отказаться от проведения сглаженной кривой блеска. Нужные для решения задачи методом Рессела—Меррилла абсциссы θ_i точек кривой блеска, которые соответствуют определенным значениям α_i , были найдены при помощи интерполирования по таблице с переменным шагом. Этой таблицей является совокупность координат нормальных точек (α_i, θ_i) , получаемых после обработки данных наблюдений. Интерполированием по данной таблице находим значения θ_i , соответствующие выбираемым в методе Рессела—Меррилла величинам α_i .

Ошибки найденных величин θ_i состоят из ошибок интерполирования $|\theta(\alpha) - P(\alpha)|$, оценку которых легко получить по известным формулам теории интерполирования и ошибок самого интерполяционного по-

линома $P(\alpha)$, возникающих из-за того, что значения $\alpha_i = \frac{1-l_i}{1-l_A}$ являются

функциями величин блеска l_i и l_A , получаемых из наблюдений с ошибками ϵ_{l_i} и ϵ_{l_A} . Отметим, что, если нормальные точки расположены достаточно близко одна от другой, то ошибки интерполирования оказываются в среднем на один-два порядка меньше ошибок интерполяционного полинома $P(\alpha)$. В таком случае в качестве ошибок ϵ_{θ_i} , принимают ошибки полинома $P(\alpha)$. Имея это в виду вычисляем величины ошибок θ_i и затем находим последовательно ошибки функций $\sin^2 \theta_i$, $M_n[\sin^2 \theta]$, $R(k)$, k , $M_n[\psi]$, A , B , $\phi_1(k)$, $\phi_2(k)$ и, наконец, ошибки ϵ_1 , ϵ_{r_1} и ϵ_{r_2} .

Итак, зная ошибки, с которыми производились фотометрические наблюдения затменной системы, т.е., зная ϵ_{l_1} (или ϵ_{m_1}) и решая кривую блеска методом Рессела–Меррилла, мы находим ошибки элементов исследуемой системы ϵ_{r_1} , ϵ_{r_2} и ϵ_1 .

Очевидно, что изложенный нами способ может быть применен при решении кривых блеска затменных систем любым методом из первой группы.

Покажем на конкретных примерах, как можно, определяя элементы затменных систем методом Рессела–Меррилла, вычислить предлагаемым способом ошибки этих элементов.

Рассмотрим две затменные системы — S Cnc (полное затмение) и YZ Cas (кольцеобразное затмение). Эти системы многократно наблюдались и исследовались.

S Cnc

Мы воспользовались фотоэлектрическими наблюдениями S Cnc Ирвина (1963). Данные этих наблюдений представлены в табл. 1.

Таблица 1

Координаты α_1 и θ_1 нормальных точек кривой блеска S Cnc

α_1	θ_1	α_1	θ_1	α_1	θ_1
0.0382	13°860	0.6448	7°834	0.9682	3°938
0.1152	12.850	0.6915	7.409	0.9831	3.578
0.1714	12.132	0.7430	6.883	0.9873	3.377
0.2593	11.200	0.7811	6.523	0.9912	3.150
0.3414	10.440	0.8072	6.217	0.9955	2.959
0.4348	9.685	0.8492	5.789	0.9982	2.794
0.5011	9.110	0.8886	5.299	1.0011	2.413
0.5649	8.568	0.9133	4.903	0.9995	1.159
0.6048	8.208	0.9434	4.424	1.0003	0.281

Интерполируя по этой таблице, находим величины θ_1 , соответствующие выбираемым в методе Рессела–Меррилла значениям α_1 . Полученные величины θ_1 и $\sin^2\theta_1$ помещены в таблице 2.

Таблица 2

α_1	θ_1	$\sin^2\theta_1$	α_1	θ_1	$\sin^2\theta_1$
0.05	13°709	0.05610	0.70	7°308	0.01618
0.10	13.051	0.05099	0.95	4.207	0.00538
0.20	11.814	0.04192	0.97	3.923	0.00468
0.50	9.119	0.02511	0.985	3.500	0.00373
0.60	8.252	0.02060			

Интерполирование производилось с помощью интерполяционного полинома Лагранжа.

По $\sin^2 \theta$ вычисляем $M_i[\sin^2 \theta]$: $M_1 = 0.004761$, $M_2 = 0.02063$, $M_3 = 0.00444$ и функцию $R = \frac{M_1 - M_2}{M_2 - M_3} = 1.666$. Принимая $x = 0.4$ и входя с найденным значением $R(k)$ в соответствующую таблицу Меррилла (1950), находим $k = 0.446$, $M_1[\psi] = 2.1555$, $M_2[\psi] = 0.0076$ и $M_3[\psi] = -1.2818$. Там же находим $\phi_1(k) = 0.3453$ и $\phi_2(k) = 0.4245$. Решая затем уравнения $M_i[\sin^2 \theta] = A + B M_i[\psi]$ ($i = 1, 2, 3$) получаем $A = 0.02054$, $B = 0.01256$ и тогда

$$\operatorname{ctg}^2 i = \frac{B}{\phi_2(k)} - A = 0.00905; \quad r_1^2 \operatorname{cosec}^2 i = \frac{B}{\phi_1(k)} = 0.03637.$$

Таким образом, при $x = 0.4$

$$k = 0.446, \quad r_1 = 0.1900, \quad r_2 = 0.0847, \quad i = 84.57^\circ \\ L_1 = 0.077, \quad L_2 = 0.923.$$

Построенная по этим элементам теоретическая кривая блеска дала для всех нормальных точек среднее значение модуля $l_{об} - l_c$ равное $|l_{об} - l_c| = 0.002$; причем, половина всех значений этих модулей не превышает 0.001.

Определение ошибок элементов системы S Спс.

Ирвин не указывает величин ошибок наблюдений ϵ_1 . Мы приняли все ϵ_1 одинаковыми, равными $\epsilon_1 = 0.001$. Действуя по схеме, изложенной выше, определим ошибки ϵ_θ . Для этого

1. Найдем ошибки интерполяции $\epsilon_{инт} = |\theta(\alpha) - P(\alpha)|$. Как известно,

$$\epsilon_{инт} = |\theta(\alpha) - P(\alpha)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} L(\alpha), \quad \text{где } M_{n+1} = \max \left| \frac{d^{n+1} \theta}{d \alpha^{n+1}} \right|.$$

Так как вид функции $\theta(\alpha)$ неизвестен и поэтому величина $\frac{d^{n+1} \theta}{d \alpha^{n+1}}$ (в нашем случае $n = 3$) тоже неизвестна, мы решили составить таблицу значений $\theta(\alpha)$ с постоянными шагом h , чтобы заменить

$$\max \left| \frac{d^{n+1} \theta}{d \alpha^{n+1}} \right| \text{ через } \max \left| \frac{\Delta^{n+1} \theta}{h^{n+1}} \right|.$$

Интерполированием табл. 1 были вы-

числены дополнительно к ранее найденным (табл. 2) величины θ в точках $\alpha = 0.40, 0.94, 0.96, 0.98, 0.99$. Так было получено два ряда значений θ , соответствующие двум рядам равноотстоящих значений α 1. $\alpha = 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70$ и 2. $\alpha = 0.94, 0.95, 0.96, 0.97, 0.98, 0.99$.

По этим двум рядам были составлены две таблицы разностей. В первой таблице шаг $h_1 = 0.1$, во второй — $h_2 = 0.01$. В первой

$|\Delta_1^4 \theta| \max = 0.00447$, во второй — $|\Delta_2^4 \theta| \max = 0.00237$. Соответственно

$$\frac{M_4'}{4!} = \frac{|\Delta_1^4 \theta|}{4! h_1^4} = 2 \text{ и } \frac{M_4''}{4!} = \frac{|\Delta_2^4 \theta|}{4! h_2^4} = 10000. \text{ Затем для всех } a \text{ из табл. 2}$$

были вычислены значения $L(a_1) = (a_1 - a_0)(a_1 - a_1)(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)$ и получена табл. 3.

Таблица 3

a_1	$M_4/4$	$L(a_1)$	$\epsilon_{\text{инт}}$	a_1	$M_4/4$	$L(a_1)$	$\epsilon_{\text{инт}}$
0.05	2	$20 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-5}$	0.60	2	$1 \cdot 10^{-6}$	0
0.10	2	$11 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-5}$	0.70	2	$3 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-5}$
0.20	2	$50 \cdot 10^{-6}$	$10 \cdot 10^{-5}$	0.95	10^4	$100 \cdot 10^{-9}$	$100 \cdot 10^{-5}$
0.30	2	$46 \cdot 10^{-6}$	$10 \cdot 10^{-5}$	0.97	10^4	$10 \cdot 10^{-9}$	$10 \cdot 10^{-5}$
0.50	2	$1 \cdot 10^{-6}$	0	0.985	10^4	$3 \cdot 10^{-10}$	0

2. Если бы аргументы a_1 , входящие в таблицу 1, по которой был построен интерполяционный полином Лагранжа $P_3(a_1)$, были точными, то, очевидно, найденные нами $\epsilon_{\text{инт}}$ и были бы искомыми ошибками ϵ_0 . Но a_1 имеют ошибки ϵ_{a_1} и поэтому значения интерполяционного полинома $P(a)$ в любых точках a , в том числе и в заданных a_1 , будут отягчены ошибками

$$\epsilon_{P(a)} = \left| \frac{dP(a)}{da} \right| \epsilon_a.$$

За величину ϵ_a мы брали $\frac{\epsilon_{a_1} + \epsilon_{a_{i+1}}}{2}$, где a_1 и a_{i+1} — ординаты двух последовательных нормальных точек, между которыми находится точка с заданным значением a .

$$\text{Найдем } \epsilon_{a_1}. \text{ Так как } a_1 = \frac{1-l_1}{1-l_A}, \text{ то } \epsilon_{a_1} = \frac{\epsilon_{l_1}}{1-l_A} + \frac{1-l_1}{(1-l_A)^2} \epsilon_{l_A}.$$

В случае S Cnc все ϵ_{l_1} одинаковы, $\epsilon_{l_1} = \epsilon_{l_A} = 0.001$ и $1-l_A = 0.923$.

Поэтому $\epsilon_{a_1} = \frac{0.001}{0.923} (1+a_1)$. Вычислив $\frac{dP}{da}$ и ϵ_a для всех значений

a_1 , мы нашли $\epsilon_{P(a)}$ для всех выбранных a_1 . Все $\epsilon_{P(a)}$ оказались больше $\epsilon_{\text{инт}}$ и поэтому мы положили $\epsilon_{\theta(a)} = \epsilon_{P(a)}$. Далее были найдены $\epsilon_{\sin^2 \theta} = \sin 2\theta \epsilon_{\theta}$. Таблица 4 содержит величины ϵ_{θ} и $\epsilon_{\sin^2 \theta}$. По $\epsilon_{\sin^2 \theta}$ были найдены $\epsilon_{M_1[\sin^2 \theta]}$ как ошибки сумм.

$$\epsilon_{M_1[\sin^2 \theta]} = 0.00012, \quad \epsilon_{M_2[\sin^2 \theta]} = 0.00008, \quad \epsilon_{M_3[\sin^2 \theta]} = 0.00016.$$

Таблица 4

α_i	ϵ_{θ_i}	$\epsilon_{\sin^2\theta_i}$	α_i	ϵ_{θ_i}	$\epsilon_{\sin^2\theta_i}$
0.05	0.0003	0.00014	0.60	0.0003	0.00008
0.10	0.0003	0.00013	0.70	0.0004	0.00010
0.20	0.0003	0.00012	0.95	0.0010	0.00014
0.30	0.0002	0.00007	0.97	0.0009	0.00012
0.50	0.0002	0.00006	0.985	0.0018	0.00021

Для сокращения будем писать M_i вместо $M_i[\sin^2\theta]$ и M_i вместо $M_i[\psi]$.

3. Так как $R = \frac{M_1 - M_2}{M_2 - M_3}$, то $\epsilon_R = \frac{(M_2 - M_3)(\epsilon_{M_1} + \epsilon_{M_2}) + (M_1 - M_2)(\epsilon_{M_2} + \epsilon_{M_3})}{(M_2 - M_3)^2}$

$$\epsilon_R = 0.03706.$$

4. Вычислим ϵ_k . Так как $\epsilon_R = \frac{\partial R}{\partial k} \epsilon_k$, то $\epsilon_k = \frac{1}{\frac{\partial R}{\partial k}} \epsilon_R$. Численным дифференцированием R по k находим $\frac{\partial R}{\partial k} = 1.879$ и $\epsilon_k = 0.0200$. (Как следует из таблицы значений функции $R(k)$, $\frac{\partial R}{\partial k} > 0$ всегда и значит можно не писать модуль $\frac{\partial R}{\partial k}$ и $\epsilon_k \cdot \epsilon_R > 0$). Имея ϵ_k мы можем вычислить все ϵ_{M_i} , $\epsilon_{\phi_i(k)}$, ϵ_A , ϵ_B и, наконец, ϵ_{r_1} , ϵ_{r_2} и ϵ_i .

5. $\epsilon_{M_i} = \left| \frac{\partial M_i}{\partial k} \right| \epsilon_k$ ($i=1, 2, 3$). $\frac{\partial M_i}{\partial k}$ находим численным дифференцированием и тогда $\epsilon_{M_1} = 0.04304$, $\epsilon_{M_2} = 0.00062$ и $\epsilon_{M_3} = 0.00477$.

Дифференцируя таблицы функций $\phi_1(k)$ и $\phi_2(k)$, вычисляем $\epsilon_{\phi_1(k)} = 0.00902$, $\epsilon_{\phi_2(k)} = 0.01800$.

6. Определение ошибок ϵ_B и ϵ_A приходится производить не по общей схеме. Дело в том, что так как $R = \frac{M_1 - M_2}{M_2 - M_3}$, то ϵ_R достигнет максимума, т.е. будет искомой предельной ошибкой в том случае, если найденные нами предельные ошибки ϵ_{M_1} и ϵ_{M_3} будут входить в выражение $R + \epsilon_R$ со знаком $+$, а ошибка ϵ_{M_2} — со знаком $-$.

Поскольку параметры A и B выражаются через величины M и $\bar{M}$, то вычисляя ϵ_B и ϵ_A мы будем употреблять ошибку ϵ_{M_2} с минусом. Из уравнений $A = M_1 - B\bar{M}_1$ можно получить три выражения функции B :

$$B = \frac{M_2 - M_3}{M_2 - \bar{M}_3} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 - \bar{M}_2} = \frac{M_1 - M_3}{M_1 - \bar{M}_3}.$$

Решая любое из них получаем $B =$

$=0.01256$. Соответственно и ошибку ϵ_B можно вычислить по любому из этих трех уравнений. Учитывая знак ϵ_{M_2} пишем, что $B + \epsilon_B =$

$$= \frac{(M_2 - \epsilon_{M_2}) - (M_3 + \epsilon_{M_3})}{(\bar{M}_2 + \epsilon_{\bar{M}_2}) - (\bar{M}_3 + \epsilon_{\bar{M}_3})}, \text{ откуда } \epsilon_B = 0.00017. \text{ Далее } \epsilon_A = M_1 + \epsilon_{M_1} - [(B + \epsilon_B)(\bar{M}_1 + \epsilon_{\bar{M}_1})] - A \text{ и } \epsilon_A = 0.00073.$$

7. Переходим к заключительной операции — непосредственному вычислению ошибок элементов системы ϵ_1 , ϵ_{r_1} и ϵ_{r_2} .

$$\text{Так как } \operatorname{ctg}^2 i = \frac{B}{\phi_2(k)} - A, \text{ то } \epsilon_{\operatorname{ctg}^2 i} = \frac{\phi_2(k) \epsilon_B + B \epsilon_{\phi_2}}{\phi_2^2(k)} + \epsilon_A = 0.00167$$

$$\text{и } \epsilon_i = \frac{\sin^2 i}{2 \operatorname{ctg} i} \epsilon_{\operatorname{ctg}^2 i}, \epsilon_i = 0.00871, \epsilon_i = 0.50, r_1^2 = \frac{B \sin^2 i}{\phi_1(k)}, \epsilon_{r_1^2} = \frac{(\sin^2 i \epsilon_B + \sin 2i \epsilon_i \cdot B) \phi_1(k) + B \sin^2 i \cdot \epsilon_{\phi_1}}{\phi_1^2(k)}, \epsilon_{r_1^2} = 0.0014, \epsilon_{r_1} = \frac{\epsilon_{r_1^2}}{2 r_1}, \epsilon_{r_1} = 0.0037.$$

$$k = \frac{r_2}{r_1}, \epsilon_k = \frac{r_1 \epsilon_{r_2} + r_2 \epsilon_{r_1}}{r_1^2} \text{ откуда } \epsilon_{r_2} = r_1 \epsilon_k - k \epsilon_{r_1}, \epsilon_{r_2} = 0.0022.$$

Итак, применив предлагаемый метод, мы нашли элементы системы S Cnc с их предельными ошибками: при $x=0.4$ $k=0.446 \pm 0.020$, $r_1=0.1900 \pm 0.0037$, $r_2=0.0847 \pm 0.0022$ и $i=84.57 \pm 0.50$.

YZ Cas

У YZ Cas, как известно, главный минимум соответствует кольцеобразному затмению. В этом случае отыскание элементов и их ошибок, предлагаемым нами способом, производится по той же схеме, что и в случае полного затмения. Небольшое осложнение возникает лишь при определении ошибки величины $1-l_A$. В соответствующем месте будет показано в чем здесь дело.

Перейдем к решению задачи. Для отыскания значений α^* нужно определить величину $1-l_A$. Зная глубины главного и вторичного минимумов кривой блеска, полученной Кроном (1942), находим приближенное значение параметра k и по нему величину функции $\Phi(k)$: $k=0.572$ и $\Phi(k)=0.7859$.

$$\text{Так как } 1-l_{AU} = 1-l' = 0.3065, \text{ то } 1-l_{AD} = \Phi(k)(1-l_{AU}) = 0.2409 \text{ и } 1-l_A = \frac{(1-l_{AU}) + (1-l_{AD})}{2} = 0.2737. \text{ Вычисляем } \alpha \text{ всех нормальных точек.}$$

Имея θ и приближенные значения α нормальных точек, интерполированием находим величины θ для $\alpha=0.05, 0.10, 0.20$, и т.д., до 0.985 , затем $\sin^2 \theta$, $M_1[\sin^2 \theta]$ и функцию $R(k)$. По функции $R(k)$ определяем но-

вое значение k и $M_1[\psi]$, находим B , A и a_0^{tr} и тогда получаем более точное значение $1-l_A = \frac{1-\lambda'}{a_0^{tr}} = 0.2820$. По этому значению $1-l_A$ вы-

числяем новые значения функции a^{tr} и повторяя весь процесс решения кривой блеска (с более точными величинами $a(\theta)$), находим третье значение $1-l_A = 0.2807$. Следующий цикл итерации дает нам четвертое значение $1-l_A = 0.2803$. На нем мы останавливаемся и определяем элементы системы. При $x=0.6$, получены $k=0.546$, $r_1=0.1427$, $r_2=0.0780$, $i=89^\circ 22'$. Построенная по этим элементам теоретическая кривая очень хорошо ложится на кривую, полученную из наблюдений. Интересно, что в нашем решении средняя величина модуля $|O-C| = 0.0013$, а в решении Песевича (Зверев и др., 1947) $|O-C| = 0.0090$.

Определение ошибок элементов $YZ Cas$

Как и в случае полного затмения, сначала находим ошибки интерполяции $\epsilon_{инт}$. Все они оказываются очень малыми, от 10^{-8} до 10^{-5} . Да-

лее нужно вычислить $\epsilon_{P(a)} = \left| \frac{dP}{da} \right| \epsilon_a$, где $\epsilon_a = \frac{1}{1-l_A} (\epsilon_1 + a \epsilon_{l_A})$. Тут возника-

ет осложнение, о котором было сказано выше. Как найти ϵ_{l_A} ?

Значения $1-l_A$ найдены последовательными приближениями. Величина $1-l_A$, на которой мы остановились, имеет, очевидно, некоторую ошибку $\epsilon_{итер}$. У нас есть три итерационных значения $1-l_A$. Для общности будем считать, что $1-l_A = 0.2820$ получено в $(n-1)$ -м приближении, т.е., что $(1-l_A)_{n-1} = 0.2820$, тогда $(1-l_A)_n = 0.2807$ и $(1-l_A)_{n+1} = 0.2803$. Допустим, что $(1-l_A)_{n+2} = (1-l_A)_{n+3} = 1-l_A$ и обозначим ошибку n' -ого приближения $\epsilon_{итер}^{(n)}$, а $1-l_A$ обозначим для краткости буквой z . Тогда $\epsilon_{итер}^{(n)} = z_{n+2} - z_n$; $\epsilon_{итер}^{(n+1)} = z_{n+2} - z_{n+1}$. Для характеристики скорости схождения итерационного процесса введем величину $\gamma =$

$$= \frac{z_{n+1} - z_n}{z_n - z_{n-1}} \text{ и постулируем, что } \epsilon_{итер}^{(n+1)} = \gamma \epsilon_{итер}^{(n)} = \gamma (z_{n+2} - z_n) \quad (1). \text{ Можно}$$

написать $\epsilon_{итер}^{(n+1)} = \gamma [(z_{n+2} - z_{n+1}) + (z_{n+1} - z_n)]$, следовательно $(1-\gamma) \epsilon_{итер}^{(n+1)} =$

$$= \gamma (z_{n+1} - z_n) \text{ или } \epsilon_{итер}^{(n+1)} = \frac{\gamma}{1-\gamma} (z_{n+1} - z_n) \quad (2). \text{ Сопоставляя (1) и (2) по-}$$

лучаем $\epsilon_{итер}^{(n)} = \frac{1}{1-\gamma} (z_{n+1} - z_n)$.

Вычисления дали величины: $\gamma = 0.308$, $\epsilon_{итер}^{(n)} = 0.0006$, $\epsilon_{итер}^{(n+1)} = 0.0002$. Таким образом, ошибка итерации уже в n' -ом приближении меньше ошибки наблюдений ϵ_1 . Поэтому можно считать $\epsilon_{l_A} = \epsilon_1 = 0.001$.

После того, как ϵ_{l_A} найдено продолжаем вычисления по той же

схеме и по тем же формулам, что и в случае S Cnc: вычисляем все ϵ_a , $\frac{dP}{da}$, ϵ_θ , $\epsilon_{\sin 2\theta}$; находим $\epsilon_{M_1[\sin 2\theta]}$, ϵ_R , $\epsilon_{M_1[\psi]}$, ϵ_k , ϵ_B , ϵ_A и, наконец, ϵ_{r_1} , ϵ_{r_2} и ϵ_1 .

Замечание по поводу определения ϵ_1 . Для вычисления этой ошибки сначала находят $\epsilon_{\text{ctg} 2i}$ (см. решение кривой блеска S Cnc). Далее,

так как $\epsilon_{\text{ctg} 2i} = \frac{d(\text{ctg}^2 i)}{di} \epsilon_i = \frac{2 \text{ctg} i}{\sin^2 i} \epsilon_i$, то $\epsilon_i = \frac{\sin^2 i}{2 \text{ctg} i} \epsilon_{\text{ctg} 2i}$. В слу-

чаях, когда угол i близок к 90° $\text{ctg} i$ очень мал и поэтому формула дает очень большую ошибку ϵ_1 . Ошибка получится меньше, если мы представим $\epsilon_{\text{ctg} 2i}$ не одним, а двумя членами разложения в ряд

Тейлора:

Тейлора: $\epsilon_{\text{ctg} 2i} = \frac{d(\text{ctg}^2 i)}{di} \epsilon_i + \frac{d^2(\text{ctg}^2 i)}{2 di^2} \epsilon_i^2$. Отсюда получаем $1.0419 \epsilon_1^2 +$

$+ 0.0278 \epsilon_1 - 0.0012 = 0$ и $\epsilon_1 = 0.0226$, или $\epsilon_1 = 1.3$. (В предварительном сообщении (Шульберг, Мурникова, 1973 г.) допущена опечатка. Там значится $\epsilon_1 = 0.3$).

Таким образом, решение кривой блеска YZ Cas предложенным нами методом, дает такие значения элементов системы с их предельными ошибками: при $x = 0.6$

$$k = 0.546 \pm 0.039, \quad r_1 = 0.1427 \pm 0.0053, \quad r_2 = 0.0780 \pm 0.0027,$$

$$i = 89^\circ 22' - 1^\circ 30'.$$

Вычисления элементов и их ошибок производилось на ЭВМ "Проминь". В тех местах, где нужны были табличные значения различных вспомогательных функций, машина останавливалась и эти значения заносились в соответствующие ячейки. Можно, конечно, обойтись без остановок машины. Для этого нужно вычислять на ЭВМ все необходимые значения табличных функций. Однако, на весьма примитивной машине "Проминь" такое решение задачи оказывается более длинным и, поэтому, менее выгодным.

Литература:

- Зверев и др., 1947 г., Переменные звезды, т. III, Гостехиздат.
 Ирвин, 1963 — Irwin J.B., ApJ 138, 1104.
 Крон, 1942 — Kron G.E., ApJ 96, 173.
 Меррил, 1950 — Merrill J.E., Contr. Princ. Univ. Obs. 23.
 Рассел, Меррил, 1952 — Russell H.N., Merrill J.E., Contr. Princ. Univ. Obs. 26.
 Табачник В.М., Шульберг А.М., 1965, АЖ 42, 590.
 Шульберг А.М., 1947, Бюл. Астр. Обс. ОГУ № 3, 2.
 Шульберг А.М., 1971, Тесные двойные звездные системы с шаровыми компонентами, Изд. "Наука".
 Шульберг А.М., Мурникова В.П., 1973, АЦМ 779.

Астрономическая обсерватория
ОГУ

430

Поступила в редакцию
29 ноября 1973 г.