

Об экспрессном способе определения элементов затменно-двойных звезд с учетом коэффициента потемнения к краю

Е.И. Лендерман

В статье приводятся таблицы $k(v, x)$, $\delta(k, x)$, $\epsilon(k, x)$ для предварительного решения кривых блеска затменно-двойных звезд по экспрессному способу В.П. Цесевича с учетом коэффициента потемнения к краю.

Приводятся результаты предварительного решения кривой блеска S Cnc.

Express Method for the Solution of the Light Curves of Eclipsing Binary Variables Taking into Account the Limb-darkening Coefficients

By E.I. Lenderman

The tables of $k(v, x)$, $\delta(k, x)$, $\epsilon(k, x)$ functions for the Zessewitsch's express-method for the occultation eclipse and the limb-darkening coefficients from 0.0 till 1.0 are given. They were used for the solution of the light curve of S Cnc.

Цесевичем (1967) был разработан экспрессный способ определения элементов орбит затменных звезд. Этот способ является усовершенствованием способов Фетлаара и Шнеллера.

На кривой блеска фиксируются 15 точек, соответствующих фотометрическим фазам $\alpha = 0.25, 0.30, \dots, 0.95$. Вычисляя потери блеска для указанных α , можно по кривой блеска получить значение угла в орбите θ и записать 15 уравнений:

$$r_1^2(1 + 2k p_j + k^2 p_j^2) = 1 - \sin^2 i \cos^2 \theta_j \quad (1)$$

Они делятся на три группы по 6, 5 и 4 уравнения последовательно. Из каждой группы образуется усредненное уравнение:

$$\begin{aligned} r_1^2 + 2r_1^2 k \bar{p}_1 + r_1^2 k^2 \bar{p}_1^2 &= 1 - \bar{B}_1 \sin^2 i \\ r_1^2 + 2r_1^2 k \bar{p}_2 + r_1^2 k^2 \bar{p}_2^2 &= 1 - \bar{B}_2 \sin^2 i \\ r_1^2 + 2r_1^2 k \bar{p}_3 + r_1^2 k^2 \bar{p}_3^2 &= 1 - \bar{B}_3 \sin^2 i \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\bar{p}$ и $\bar{p}^2$ — средние значения параметров p_j в каждой группе.

$$\bar{B}_1 = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 \cos^2 \theta_j, \quad \bar{B}_2 = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 \cos^2 \theta_j, \quad \bar{B}_3 = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \cos^2 \theta_j.$$

Из уравнений (2) легко получается функция

$$V = \frac{\bar{B}_2 - \bar{B}_1}{\bar{B}_3 - \bar{B}_2} = \frac{2(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) + k(\bar{p}_1^2 - \bar{p}_2^2)}{2(\bar{p}_2 - \bar{p}_3) + k(\bar{p}_2^2 - \bar{p}_3^2)}. \quad (3)$$

Эта функция, с одной стороны, зависит от отношения радиусов звезд $k = \frac{r_2}{r_1}$ и коэффициента потемнения к краю x , т.к. $\bar{p}$ и $\bar{p}^2$ зависят от x и k и не зависят от a . С другой стороны, V определяется из наблюдений по вычисленным $\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3$. Песевич предложил пользоваться функцией $k(V)$ и двумя вспомогательными функциями:

$$\delta = k^2(\bar{p}_1^2 - \bar{p}_2^2) + 2k(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \quad (4)$$

$$\epsilon = 1 + 2k\bar{p}_1 + k^2\bar{p}_1^2, \quad (5)$$

которые также зависят от k и x .

Величины r_1^2 и $\sin^2 i$ легко вычисляются с помощью функций δ и ϵ :

$$r_1^2 = \frac{\bar{B}_1 - \bar{B}_2}{\bar{B}_1 \delta + (\bar{B}_1 - \bar{B}_2) \epsilon} \quad (6)$$

$$\sin^2 i = \frac{\delta}{\bar{B}_1 \delta + (\bar{B}_1 - \bar{B}_2) \epsilon}$$

Песевичем были вычислены таблицы $k(V)$, δ и ϵ для полного и частного затмений в случае однородных дисков. Подобные таблицы можно вычислить и для случая потемненных дисков.

В данной работе приводятся результаты вычисления таблиц функций $k(V, x)$ (табл. 1), $\delta(k, x)$ (табл. 2) и $\epsilon(k, x)$ (табл. 3) для полного затмения и гипотезы дисков, потемненных к краю.

Для вычисления таблиц функций $V(k, x)$, $\delta(k, x)$ и $\epsilon(k, x)$ использовались таблицы Дэвиса (1963) p -функций для x -гипотезы. Задача вычисления функции $k(V, x)$ решалась как задача обратной интерполяции функции $V(k, x)$ при фиксированном x . Применялась квадратичная интерполяция по схеме Эйткина.

С помощью таблиц 1, 2, 3 было получено предварительное решение кривой блеска S Спс по описанной схеме.

Главный минимум S Спс соответствует полному затмению. Компоненты этой системы почти сферические, а орбита круговая. Главный компонент относится к спектральному классу A0, вторичный — G5 IV.

Были использованы результаты трехцветных наблюдений Хаффера и Коллинза (1962) для $\lambda_{eff} = 3500 \text{ \AA}, 4200 \text{ \AA}, 5400 \text{ \AA}$.

Результаты решения трех кривых блеска представлены в табл. 4. В столбцах указаны геометрические элементы, соответствующие значениям x от 0.0 до 1.0 через 0.1. Здесь r_1 — радиус большей, r_2 — меньшей звезды, $\sin i$ — синус угла наклона плоскости орбиты к картинной плоскости.

Таблица 1

Функция $k(V, x)$

V/x	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
2.75	.9982*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
.70	.9890	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
.65	.9792	.9920	—	—	—	—	—	—	—	—	—
.60	.9688	.9818	.9955	—	—	—	—	—	—	—	—
.55	.9578	.9710	.9848	.9994	—	—	—	—	—	—	—
.50	.9463	.9594	.9735	.9883	—	—	—	—	—	—	—
.45	.9343	.9474	.9614	.9765	.9924	—	—	—	—	—	—
.40	.9216	.9348	.9487	.9638	.9799	.9969	—	—	—	—	—
.35	.9080	.9213	.9355	.9504	.9666	.9838	—	—	—	—	—
.30	.8937	.9070	.9213	.9364	.9524	.9698	.9883	—	—	—	—
.25	.8786	.8920	.9063	.9215	.9376	.9548	.9735	.9933	—	—	—
.20	.8626	.8761	.8904	.9056	.9219	.9392	.9576	.9776	.9988	—	—
.15	.8455	.8591	.8736	.8888	.9050	.9224	.9409	.9607	.9821	—	—
.10	.8275	.8411	.8555	.8709	.8872	.9045	.9231	.9429	.9641	.9869	—
.05	.8083	.8251	.8365	.8518	.8682	.8856	.9040	.9238	.9449	.9676	.9918
2.00	.7879	.8015	.8161	.8316	.8478	.8652	.8837	.9034	.9245	.9469	.9710
1.95	.7661	.7799	.7944	.8098	.8262	.8436	.8620	.8817	.9026	.9250	.9487
.90	.7428	.7566	.7713	.7867	.8030	.8204	.8388	.8583	.8792	.9013	.9249
.85	.7180	.7319	.7464	.7619	.7783	.7956	.8140	.8334	.8540	.8760	.8992
.80	.6914	.7053	.7200	.7354	.7517	.7690	.7873	.8066	.8271	.8487	.8717
.75	.6630	.6768	.6915	.7069	.7232	.7404	.7586	.7778	.7980	.8194	.8420
.70	.6325	.6463	.6609	.6764	.6925	.7097	.7277	.7467	.7668	.7879	.8101
.65	.5997	.6135	.6282	.6434	.6596	.6766	.6945	.7133	.7331	.7538	.7756
.60	.5645	.5783	.5928	.6080	.6241	.6409	.6586	.6771	.6967	.7171	.7383
.55	.5266	.5403	.5547	.5698	.5857	.6023	.6198	.6384	.6573	.6772	.6979
.50	.4857	.4993	.5136	.5286	.5443	.5607	.5779	.5963	.6146	.6340	.6540
.45	.4417	.4552	.4692	.4840	.4994	.5156	.5325	.5501	.5683	.5872	.6065
.40	.3941	.4074	.4212	.4357	.4509	.4667	.4832	.5003	.5180	.5362	.5548
.35	.3427	.3556	.3693	.3835	.3982	.4137	.4297	.4463	.4634	.4808	.4984
.30	.2870	.2998	.3130	.3268	.3412	.3562	.3716	.3875	.4037	.4203	.4371
.25	.2268	.2392	.2520	.2654	.2792	.2935	.3083	.3235	.3390	.3545	.3700
.20	.1617	.1736	.1859	.1988	.2119	.2256	.2396	.2538	.2684	.2828	.2969
.15	.0914	.1027	.1144	.1263	.1388	.1515	.1646	.1779	.1912	.2043	.2170
.10	.0159	.0265	.0375	.0481	.0600	.0709	.0836	.0955	.1075	.1191	.1301

* Нуль перед точкой опущен (для экономии места).

Таблица 2

Функция $\delta(k, x)$

k/x	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
1.00	0.76819	0.76228	0.75594	0.74911	0.74176	0.73383
0.95	.73972	.73372	.72730	.72042	.71304	.70511
0.90	.70972	.70370	.69726	.69040	.68304	.67517
0.85	.67825	.67226	.66588	.65909	.65183	.64408
0.80	.64539	.63949	.63322	.62655	.61945	.61187
0.75	.61122	.60546	.59936	.59288	.58597	.57863
0.70	.57585	.57030	.56439	.55813	.55149	.54443
0.65	.53937	.53403	.52838	.52240	.51606	.50932
0.60	.50185	.49678	.49142	.48576	.47975	.47338
0.55	.46339	.45863	.45360	.44828	.44264	.43668
0.50	.42407	.41964	.41496	.41003	.40480	.39928
0.45	.38396	.37990	.37561	.37108	.36630	.36124
0.40	.34316	.33948	.33560	.33151	.32719	.32262
0.35	.30172	.29845	.29501	.29138	.28754	.28349
0.30	.25973	.25689	.25390	.25075	.24742	.24391
0.25	.21725	.21486	.21234	.20968	.20688	.20392
0.20	.17436	.17242	.17039	.16825	.16599	.16360
0.15	.13112	.12966	.12812	.12650	.12479	.12299

k/x	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
1.00	0.72528	0.71603	0.70603	0.69521	0.68348
0.95	.69657	.68738	.67748	.66679	.65524
0.90	.66673	.65766	.64791	.63742	.62611
0.85	.63578	.62690	.61736	.60712	.59612
0.80	.60379	.59514	.58587	.57595	.56530
0.75	.57080	.56245	.55352	.54396	.53372
0.70	.53690	.52889	.52034	.51120	.50143
0.65	.50216	.49453	.48640	.47773	.46846
0.60	.46662	.45942	.45176	.44359	.43487
0.55	.43035	.42362	.41646	.40884	.40072
0.50	.39341	.38719	.38057	.37353	.36603
0.45	.35587	.35018	.34413	.33771	.33086
0.40	.31778	.31265	.30721	.30142	.29526
0.35	.27920	.27466	.26984	.26472	.25927
0.30	.24019	.23625	.23208	.22764	.22293
0.25	.20080	.19748	.19397	.19025	.18629
0.20	.16108	.15841	.15558	.15258	.14938
0.15	.12108	.11907	.11693	.11467	.11226

Т а б л и ц а 3

Функция $\epsilon(k, x)$

k/x	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
1.00	1.09306	1.09475	1.09651	1.09834	1.10027	1.10228
0.95	.10615	.10734	.10858	.10988	.11124	.11266
0.90	.11690	.11766	.11845	.11928	.12014	.12105
0.85	.12544	.12583	.12623	.12664	.12708	.12754
0.80	.13187	.13193	.13199	.13205	.13212	.13219
0.75	.13627	.13605	.13583	.13559	.13534	.13508
0.70	.13872	.13829	.13782	.13733	.13682	.13627
0.65	.13931	.13868	.13802	.13732	.13660	.13583
0.60	.13808	.13730	.13649	.13564	.13474	.13380
0.55	.13510	.13422	.13329	.13232	.13130	.13022
0.50	.13043	.12947	.12847	.12742	.12631	.12515
0.45	.12411	.12311	.12208	.12098	.11983	.11862
0.40	.11618	.11519	.11414	.11304	.11189	.11067
0.35	.10671	.10574	.10472	.10365	.10253	.10134
0.30	.09571	.09480	.09384	.09284	.09178	.09067
0.25	.08324	.08242	.08155	.08064	.07968	.07868
0.20	.06933	.06862	.06788	.06709	.06627	.06540
0.15	.05402	.05345	.05285	.05222	.05156	.05086

k/x	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
1.00	1.10439	1.10660	1.10893	1.11138	1.11395
0.95	.11416	.11573	.11738	.11911	.12093
0.90	.12201	.12301	.12406	.12517	.12634
0.85	.12802	.12852	.12905	.12961	.13020
0.80	.13226	.13234	.13241	.13250	.13259
0.75	.13480	.13451	.13421	.13388	.13354
0.70	.13570	.13511	.13448	.13382	.13312
0.65	.13502	.13418	.13328	.13234	.13135
0.60	.13280	.13176	.13066	.12949	.12826
0.55	.12909	.12790	.12664	.12531	.12391
0.50	.12392	.12263	.12127	.11983	.11831
0.45	.11735	.11600	.11458	.11309	.11150
0.40	.10939	.10804	.10662	.10511	.10351
0.35	.10010	.09878	.09739	.09592	.09437
0.30	.08949	.08825	.08694	.08556	.08409
0.25	.07761	.07649	.07530	.07404	.07272
0.20	.06448	.06351	.06248	.06140	.06025
0.15	.05013	.04935	.04852	.04765	.04673

Таблица 4

Таблица 4												
$\lambda_{eff} = 5400 \text{ \AA}$ $\overline{B}_2 = 0.98193$ $V = 1.382$ $\overline{B}_1 = 0.96886$ $\overline{B}_3 = 0.99138$												
Элементы/x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
k	0.376	0.389	0.403	0.417	0.432	0.448	0.464	0.481	0.498	0.516	0.535	
r ₁	0.200	0.198	0.196	0.194	0.192	0.190	0.188	0.186	0.185	0.184	0.182	
r ₂	0.075	0.077	0.079	0.081	0.083	0.085	0.087	0.090	0.092	0.095	0.098	
sin i	0.993	0.994	0.994	0.994	0.995	0.995	0.996	0.996	0.996	0.996	0.997	

$\lambda_{eff} = 4200 \text{ \AA}$ $\overline{B}_2 = 0.98152$ $V = 1.364$ $\overline{B}_1 = 0.96851$ $\overline{B}_3 = 0.99106$												
Элементы/x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
k	0.357	0.370	0.384	0.398	0.413	0.429	0.445	0.462	0.479	0.497	0.514	
r ₁	0.204	0.202	0.199	0.197	0.195	0.193	0.191	0.190	0.188	0.186	0.185	
r ₂	0.073	0.075	0.077	0.079	0.081	0.083	0.085	0.088	0.090	0.093	0.095	
sin i	0.992	0.993	0.993	0.994	0.994	0.995	0.995	0.996	0.996	0.996	0.996	

$\lambda_{eff} = 3500 \text{ \AA}$ $\overline{B}_2 = 0.98121$ $V = 1.358$ $\overline{B}_1 = 0.96805$ $\overline{B}_3 = 0.99089$												
Элементы/x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
k	0.351	0.364	0.378	0.392	0.407	0.423	0.439	0.455	0.473	0.490	0.508	
r ₁	0.207	0.204	0.202	0.200	0.198	0.196	0.194	0.192	0.190	0.189	0.187	
r ₂	0.073	0.074	0.076	0.078	0.080	0.083	0.085	0.087	0.090	0.092	0.095	
sin i	0.992	0.993	0.993	0.994	0.994	0.994	0.995	0.995	0.996	0.996	0.996	

Для каждой наблюдаемой кривой строилось 11 теоретических с элементами, указанными в табл. 4. Все теоретические кривые лежат в полосе рассеяния.

Чтобы найти лучшее представление наблюдаемой кривой, ищались суммы $\Sigma(a_{об} - a_c)^2$, где $a_{об}$ — фотометрические фазы сглаженной кривой со значениями 0.10, 0.15, 0.20 ..., 0.95, 0.975, a_c — соответствующие им фазы теоретической кривой. Значения $10^4 \Sigma(a_{об} - a_c)^2$ для трех кривых блеска и соответствующих теоретических кривых с $x=0.0, 0.1, \dots, 1.0$ приведены в табл. 5

Таблица 5

	$\Sigma(a_{об} - a_c)^2 \cdot 10^4$										
$\lambda_{эф}/x$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
5400 Å	3.58	2.63	2.24	1.88	1.72	1.70	1.77	1.96	2.14	2.40	2.67
4200 Å	5.76	4.17	3.47	2.82	2.30	1.95	1.69	1.59	1.60	1.64	1.76
3500 Å	1.37	1.06	0.92	0.94	1.05	1.31	1.67	2.03	2.51	2.94	3.36

Из табл. 5 следует, что в желтых лучах наилучшим является представление кривой блеска элементами с $x=0.5$, в синих — с $x=0.7$, в ультрафиолетовых — с $x=0.2$. Значения геометрических элементов для желтой и синей кривых близки между собой и отличаются от элементов для ультрафиолетовой кривой.

Следует отметить, что полученные элементы неплохо согласуются с элементами Табачника (1968), полученными при точном решении кривой блеска S Спс отдельно в каждом луче методом наискорейшего спуска.

Если заранее известны приближенные значения коэффициентов потемнения к краю, решение задачи экспрессным способом значительно упрощается. В этом случае не нужно выбирать из 11 групп элементов ту, что лучше других представляет наблюдаемую кривую блеска, и после получения значения V решение занимает несколько минут.

В заключение автор выражает благодарность В.П.Цесевичу за руководство данной работой.

Литература:

- Дэвис, 1964 — Davis W. D., P-functions. Occultation Eclipse. Astron. Dept San Diego State College. A. J., 1963, 68, № 5, 277.
 Табачник В.М., 1968, АЖ 45, 1048.
 Хаффер, Коллинз, 1962 — Huffer C. H., Collins G. M., ApJ Suppl. ser., 71, 350.
 Цесевич В.П., 1967, Проблемы космической физики, вып. 2, 13.

Одесская астрономическая
 обсерватория

Поступила в редакцию
 20 января 1973 г.