

**Прямой метод решения кривой блеска затменной системы
с протяженной атмосферой. Учет весов. Программы для ЭВМ.**

А. М. Черепашук

Описан прямой метод решения кривой блеска затменной системы с протяженной атмосферой. Все неизвестные: функции $I_c(\xi)$ и $I_a^p(\xi)$, описывающие структуру диска пекулярной компоненты, и параметры r_p, i (r_p — радиус спутника, i — наклонение орбиты) находятся из условия минимума $|O-C|$ — весовой суммы квадратов уклонений наблюдаемой кривой блеска от теоретической. Это обеспечивает надежность решения и дает возможность уверенной оценки его погрешности. Приведены соответствующие программы для ЭВМ на языке ФОРТРАН.

**The Direct Method of Light Curve Solution of the Eclipsing Binary
System with an Extended Atmosphere. Calculation and Application
of Weights. Computer Programmes.**

by A.M. Cherepashchuk

The direct method for light curve solution of an eclipsing binary system with an extended atmosphere is described. All unknown values: functions $I_c(\xi)$ and $I_a^p(\xi)$, describing the structure of the disk of the peculiar component, and parameters r_p, i (r_p — the satellite radius, i — inclination of the orbit plane) are obtained using the minimum of $|O-C|$. The value of $|O-C|$ is the weighted sum of square deviations of theoretical light curve from the observed one. It allows to obtain the reliable solution and its error. Computer programmes in the FORTRAN for light curve solution by this new method are given.

Введение. В настоящей работе развивается высказанная ранее идея о возможности прямого варианта нового метода решения кривой блеска затменной системы с протяженной атмосферой (см. Дополнение в работах Черепашука, 1974 и Черепашука и др., 1973). В прямом варианте нового метода все искомые величины находятся из условия минимума $|O-C|$ — расстояния между наблюдаемой и теоретической кривыми блеска, что обеспечивает надежность решения и дает возможность уверенной оценки его погрешности (под решением понимается совокупность $I_c(\xi)$, $I_a^p(\xi)$, r_p, i , где $I_c(\xi)$ и $I_a^p(\xi) = I_a^0 [1 - \epsilon^{\tau(\xi)}]$ — искомые функции, выражающие распределение яркости и свойств по-

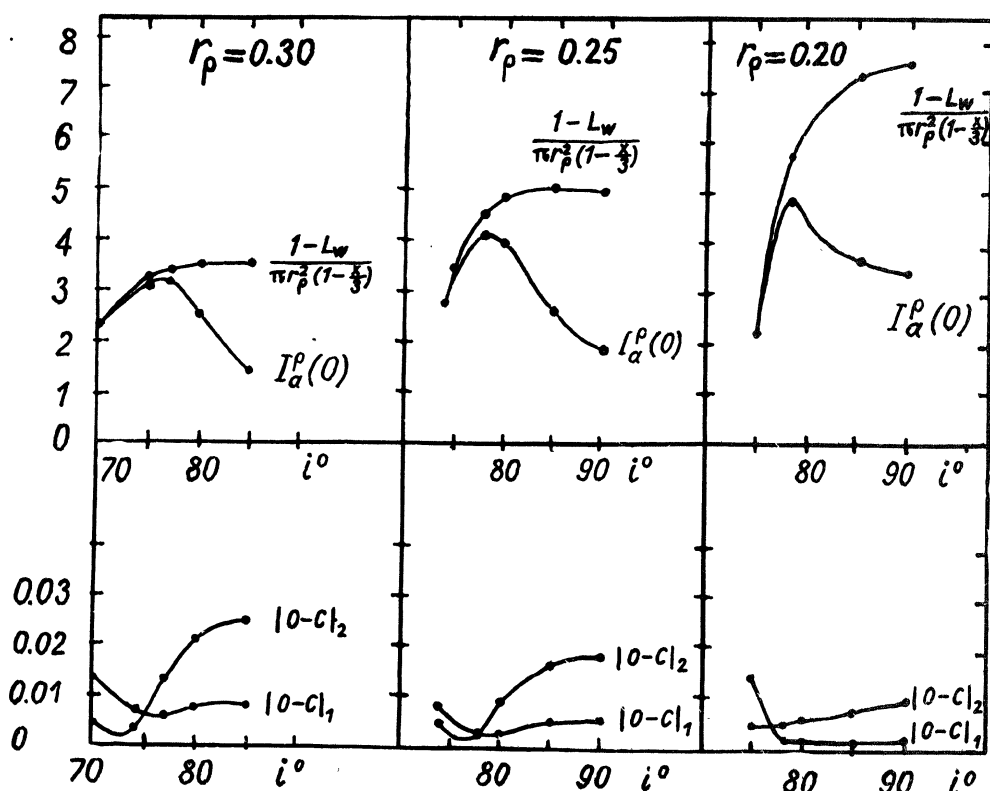


Рис. 1. Внизу: зависимость $|O-C|_1$ и $|O-C|_2$ от параметров r_p , i ($|O-C|$ — среднеквадратичное уклонение на единицу веса наблюдений кривой блеска от теоретической), $|O-C|_1$ соответствует атмосферному затмению, возрастание $|O-C|_1$ с уменьшением i обусловлено использованием неравенства (4) при решении интегрального уравнения (1) ("сжимаем" функции $I_\alpha^p(\xi)$ верхней ограничивающей константой).

Вверху, показано поведение правой и левой частей уравнения (3). Максимум кривой, изображающей значения $I_\alpha^p(0)$, совпадает с минимумом $|O-C|_1$. Этот максимум соответствует удовлетворительному выполнению условия (3) и, совместно с минимумом $|O-C|_1$, позволяет каждому значению r_p поставить в соответствие определенное значение i , т. е. установить зависимость $r_p(i)$. Случай V444 Cyg, $\lambda 4244$, $\Delta\lambda = 75 \text{ \AA}$.

глошения по диску компоненты с протяженной атмосферой, r_p — радиус спутника-нормальной звезды, i — наклонение орбиты). При этом особое внимание уделяется учету весов нормальных точек кривой блеска, что позволяет учесть как погрешности наблюдений, так и погрешности, связанные с неопределенностью процедуры ректификации кривой блеска. Приводятся программы для ЭВМ на языке ФОРТРАН для решения в классе монотонных неотрицательных функций интегральных уравнений, описывающих потерю блеска при затмениях в главном и вторичном минимумах. Каждая из этих программ позволяет получить при фиксированном значении

параметра r_ρ серию решений интегральных уравнений при различных значениях параметра i , что значительно облегчает прогноз задачи по параметрам r_ρ , i .

Постановка задачи. Постановка задачи определения элементов полуклассической затменной системы (Черепашук, 1971) детально описана ранее (Черепашук, 1974; Черепашук и др., 1973); там же приведены все необходимые обозначения и формулы. Метод решения, описанный в главной части этих работ, не является полностью прямым, поскольку по минимуму $|O-C|$ здесь выбирается лишь один искомый параметр r_ρ . Значение угла наклона орбиты i при этом находится из уравнения, выражающего условие нормировки суммарной светимости компонент $L_W + L_O = 1$, выполнимость которого не контролируется ходом $|O-C|$. Это не позволяет провести надежную оценку погрешности определения параметра i , а следовательно и погрешности всего решения (совокупности r_ρ , i , $I_c(\xi)$, $I_\rho^0(\xi)$).

В настоящей работе мы рассмотрим прямой вариант нового метода. Рассмотрим, для определенности, частные затмения в полуклассической затменной системе. Результаты настоящей работы легко применить и к случаю полного затмения (Черепашук, 1971).

Прямой вариант нового метода решения кривой блеска полуклассической затменной системы (см. Дополнение в работах Черепашук, 1974, Черепашук и др., 1973) описывается следующей системой уравнений и неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1 - I_1(\theta) = \int_0^{R_{\xi_a}} K_1(\xi, \Delta, r_\rho) I_\rho^0(\xi) d\xi; & \cos i \leq \Delta \leq R_{\xi_a} + r_\rho; \quad (1) \\ 1 - I_2(\theta) = \int_0^{R_{\xi_c}} K_2(\xi, \Delta, r_\rho) I_c(\xi) d\xi; & \cos i \leq \Delta \leq R_{\xi_c} + r_\rho; \quad (2) \\ I_\rho^0(0) = \frac{1 - \int_0^{R_{\xi_a}} I_c(\xi) 2\pi \xi d\xi}{\pi r_\rho^2 (1 - \frac{x}{3})}; & (3) \\ 0 \leq I_\rho^0(\xi) \leq \frac{1 - \int_0^{R_{\xi_c}} I_c(\xi) 2\pi \xi d\xi}{\pi r_\rho^2 (1 - \frac{x}{3})}; & (4) \\ 0 \leq I_c(\xi) \leq C_2, & (5) \end{array} \right.$$

где искомые функции $I_\rho^0(\xi)$ и $I_c(\xi)$ априори считаются монотонными (невозрастающими).

Здесь, как обычно, $1 - I_1(\theta)$ и $1 - I_2(\theta)$ — наблюдаемые потери блеска (уравнение (1) соответствует атмосферному затмению), $K_{1,2}(\xi, \Delta, r_\rho)$ — ядра интегральных уравнений (1), (2), описывающие форму области пе-

рекрытия дисков компонент (аналитические выражения для ядер даны в работах Черепашука, 1974; Черепашука и др., 1973), $I_c(\xi)$ и $I_\rho^0(\xi) = I_\rho^0 [1 - e^{-\tau(\xi)}]$ — искомые функции (I_ρ^0 — яркость в центре диска спутника — нормальной звезды, $\tau(\xi)$ — оптическая толща на луче зрения при рассматривании диска пекулярной компоненты "на просвет", ξ — полярное расстояние на диске пекулярной компоненты), x — коэффициент потемнения к краю диска спутника — нормальной звезды, который можно взять в соответствии со спектральным классом спутника (Григар, 1965), R_{ξ_a} и R_{ξ_c} — параметры, мажорирующие полные радиусы дисков поглощения и излучения пекулярной компоненты (величины полных радиусов r_{ξ_a} и r_{ξ_c} определяются точками пересечения функций $I_\rho^0(\xi)$ и $I_c(\xi)$ с нулем). Величины R_{ξ_a} и R_{ξ_c} можно оценить из условий внешнего касания дисков:

$$R_{\xi_a} = \sqrt{\cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \theta_a(0)} - r_\rho; \quad (6)$$

$$R_{\xi_c} = \sqrt{\cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \theta_c(0)} - r_\rho, \quad (7)$$

где $\theta_a(0)$ и $\theta_c(0)$ — углы, соответствующие началу затмений ($\theta_a(0)$ относится к атмосферному затмению), снимаются с кривой блеска. Задача решения кривой блеска полуклассической затменной системы слабо чувствительна к неточности определения $\theta_a(0)$ и $\theta_c(0)$ по кривой блеска (важно только не брать $\theta_a(0)$ и $\theta_c(0)$ слишком малыми, поскольку R_{ξ_a} и R_{ξ_c} — мажорирующие параметры). Угол относительного поворота компонент θ связан с расстоянием между центрами дисков компонент Δ известным соотношением (орбита круговая):

$$\Delta = \sqrt{\cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \theta} \quad (8)$$

Система уравнений (1) — (3) в совокупности с ограничениями (4) — (5) и условием монотонности искомых функций $I_\rho^0(\xi)$, $I_c(\xi)$ представляет собой корректную задачу относительно неизвестных r_ρ , i , $I_c(\xi)$, $I_\rho^0(\xi)$, которая является замкнутой в том случае, если в исследуемой затменной системе выполняется условие $\cos i < r_\rho$ (Черепашук, 1974).

Для обоснования гипотезы $\cos i < r_\rho$ имеется достаточный критерий (Черепашук, 1973), который позволяет независимо от конкретных значений параметров r_ρ , i и до решения кривой блеска доказать, что в исследуемой затменной системе это условие выполняется (системы, в которых условие $\cos i < r_\rho$ не выполняется, не могут быть интерпретированы однозначно).

Ограничивающая константа C_2 в неравенстве (5) подбирается экспериментально (эта константа с одной стороны не должна быть слишком велика, чтобы не приводить к слишком большим затратам машинного времени при нахождении функции $I_c(\xi)$ из уравнения (2); с другой стороны, эта константа не должна быть слишком мала с тем, чтобы не слишком ограничивать функцию $I_c(\xi)$ сверху, поскольку это может приво-

доть к искусственному возрастанию $|O-C|$ при решении уравнения (2), что недопустимо; искусственное ограничение искомой функции сверху целесообразно лишь при решении уравнения (1), но при этом верхняя ограничивающая константа не произвольна, а связана с функцией $I_c(\xi)$, полученной из уравнения (2) — см. ниже).

Ранее, в старом варианте метода (Черепашук и др., 1973), интегральное уравнение (1) решалось в классе монотонных ограниченных функций при следующих ограничениях на искомую функцию $I_a^p(\xi)$:

$$0 \leq I_a^p(\xi) \leq C, \quad (9)$$

где верхняя ограничивающая константа C выбиралась в значительной степени произвольно и служила лишь для устранения некорректности в точке $\xi=0$ (такую же роль выполняет и константа C_2 в неравенстве (5)). Значение константы C бралось достаточно большим с тем, чтобы не допустить искусственного ограничения искомой функции $I_a^p(\xi)$ и получить функцию $I_a^p(\xi)$, "наилучшим образом" удовлетворяющую уравнению (1), то-есть реализующую минимум $|O-C|$ (этот минимум $|O-C|$ в случае, когда в системе выполняется условие $\cos i < r_\rho$ и в случае значений параметров r_ρ, i , далеких от истинных, может значительно превосходить погрешность δ задания кривой блеска, что и дает возможность однозначного определения параметров r_ρ, i). Очевидно, что с уменьшением верхней ограничивающей константы C в неравенстве (9) искомая функция $I_a^p(\xi)$ будет искусственно ограничиваться сверху ("сжиматься"), что должно приводить к ухудшению соответствия между наблюдаемой и теоретической кривыми блеска при решении интегрального уравнения (1), то-есть к возрастанию $|O-C|$, соответствующего атмосферному затмению. Именно такую роль играет верхняя ограничивающая константа в неравенстве (4).

Использование неравенства (4) при решении интегрального уравнения (1) и составляет суть прямого варианта нового метода: в этом случае искомая функция $I_a^p(\xi)$ искусственно ограничивается сверху константой, которая выбирается не произвольно, но выражается через функцию $I_c(\xi)$, полученную из другого минимума кривой блеска. Поскольку функция $I_c(\xi)$ определяется из уравнения (2), верхняя ограничивающая константа в неравенстве (4) при фиксированных значениях параметров r_ρ, i определяется однозначно. Решая интегральное уравнение (1) с ограничениями (4), мы тем самым обуславливаем более сильную зависимость $|O-C|$ от параметров r_ρ, i в тех случаях, когда константа

$$\frac{1 - L_w}{\pi r_\rho^2 \left(1 - \frac{x}{3}\right)} \quad (10)$$

достаточно мала и "сжимает" функцию $I_a^p(\xi)$ сверху. В тех случаях, когда константа (10) велика, и "сжатия" искомой функции $I_a^p(\xi)$ не происходит, необходимо использовать уравнение (3). Если рассматрива-

мая затменная система удовлетворительно описывается полуклассической моделью, то при использовании неравенства (4) минимум $|O-C|_1$ должен совпадать с выполнением условия (3). Поскольку некорректность в точке $\xi=0$ для функции $I_\alpha^p(\xi)$ устраняется однозначным выбором верхней ограничивающей константы, в уравнении (3) не проводится усреднение функции $I_\alpha^p(\xi)$ в пределах непрозрачного ядра. Таким образом, излагаемая процедура решения задачи не зависит от значения параметра r_0 — радиуса непрозрачного ядра, который получается автоматически как результат решения задачи. Тот факт, что выполнимость условия (3), связывающего оба минимума кривой блеска и выражающего условие нормировки $L_w + L_o = 1$, контролируется минимумом $|O-C|_1$, сильно повышает надежность решения и дает возможность уверенной оценки его погрешности.

Казалось бы, от использования уравнения (3) можно совсем отказаться, если, при решении интегрального уравнения (1) "закрепить" значение функции $I_\alpha^p(\xi)$ в точке $\xi=0$ равенством:

$$I_\alpha^p(0) = \frac{1 - L_w}{\pi r_\rho^2 (1 - \frac{x}{3})}. \quad (11)$$

Однако такое ограничение на функцию $I_\alpha^p(\xi)$ приведет к заметному возрастанию $|O-C|_1$ лишь в тех случаях, когда константа (10) достаточно мала и "сжимает" функцию $I_\alpha^p(\xi)$. В тех случаях, когда константа (10) велика, равенство (11) может выполняться лишь в одной точке (поскольку это не противоречит условию невозрастания функции $I_\alpha^p(\xi)$). Поскольку вклад центральных частей диска ($\xi \sim 0$) в интеграл по области перекрытия дисков мал, это не приведет к существенному возрастанию $|O-C|_1$. Для того, чтобы при больших значениях константы (10) иметь заметное увеличение $|O-C|_1$, необходимо равенство (11) писать не для одной точки $\xi=0$, а для всех точек, принадлежащих непрозрачному ядру $0 \leq \xi \leq r_0$ (Черепашук и др., 1973). Однако, в этом случае возникает проблема определения радиуса ядра r_0 (Черепашук и др., 1973) в процессе решения задачи. С тем, чтобы избежать необходимости использования параметра r_0 при определении элементов, мы накладываем на искомую функцию $I_\alpha^p(\xi)$ ограничение в виде неравенства (4), что, как уже отмечалось, требует дополнительного использования уравнения (3) (использование уравнения (3) — операция, значительно более простая и определенная, чем определение параметра r_0 в процессе решения задачи).

Таким образом, исключение параметра i (Черепашук и др., 1973), т.е. установление зависимости $r_\rho(i)$ в прямом варианте нового метода проводится как с помощью уравнения (3), так и с помощью минимума $|O-C|_1$, соответствующего атмосферному затмению (интегральное уравнение (1)). Выбор искомого значения параметра $r_\rho(i)$, определяющего решение задачи, можно проводить по минимуму $|O-C|_2$, соответствующему интегральному уравнению (2) (минимум кривой блеска, соответст-

вующий случаю "спутник—нормальная звезда впереди пекулярной компоненты"). Поскольку искомая функция $I_c(\xi)$ в интегральном уравнении (2) не "сжимается" сверху, ход $|O-C|_2$ должен отличаться от хода $|O-C|_1$ с изменением параметров r_p, i . Это и позволяет определить однозначно параметры r_p, i и соответствующие им функции $I_a^p(\xi), I_c(\xi)$.

Изложенные соображения можно иллюстрировать рисунком 1. Здесь вверху приведены в зависимости от i для различных r_p значения $I_a^p(O)$, получаемые из главного минимума кривой блеска системы V444 Cyg в результате решения интегрального уравнения (1) с ограничениями (4) в метрике (17) с помощью программы П1 (см. ниже). Вверху также приведены в зависимости от r_p, i значения величины (10), получаемые из вторичного минимума кривой блеска V444 Cyg путем решения интегрального уравнения (2) (см. программу ПII). Эти значения ограничивают искомую функцию $I_a^p(\xi)$ сверху. Видно, что в случае $r_p = 0.25$ $i < 78^\circ$ функция $I_a^p(\xi)$ начинает "сжиматься" сверху, что приводит к возрастанию $|O-C|_1$, — среднеквадратичного уклонения на единицу веса теоретической кривой блеска от наблюдаемой. Таким образом, для $i > 78^\circ$ не выполняется условие (3), для $i < 78^\circ$ условие (3) выполняется (с точностью до малых уклонений, обусловленных тем, что число итераций при решении уравнения (1) конечно), но при этом $|O-C|_1$ возрастает из-за "сжатия" функции $I_a^p(\xi)$ сверху. Это дает основание считать, что значению $r_p = 0.25$ соответствует $i = 78^\circ$. Таким образом устанавливается зависимость $r_p(i)$, изображенная на рис. 2. Вдоль этой зави-

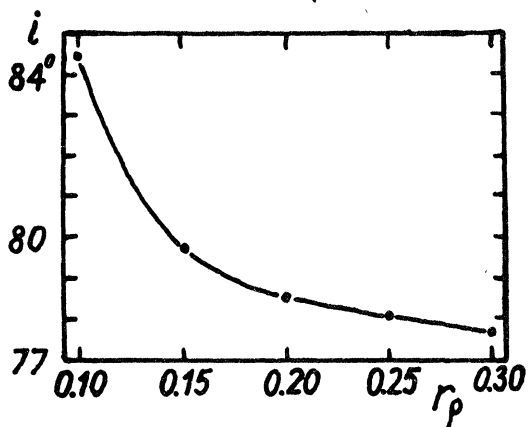


Рис. 2.

Зависимость $r_p(i)$, полученная с использованием уравнения (3) и минимума $|O-C|_1$ (см. рис. 1).

симости $r_p(i)$ существует определенный ход $|O-C|_2$ во вторичном минимуме кривой блеска (см. рис. 3). Минимум $|O-C|_2$ однозначно определяет решение задачи: $r_p, i, I_c(\xi), I_a^p(\xi)$. Если известна погрешность δ кривой блеска, то зависимости $|O-C|_1$ и $|O-C|_2$ позволяют оценить погрешности элементов r_p, i , а следовательно и погрешности искомых функций (для этого достаточно решить интегральные уравнения (1), (2) несколько раз при различных значениях параметров r_p, i , лежащих

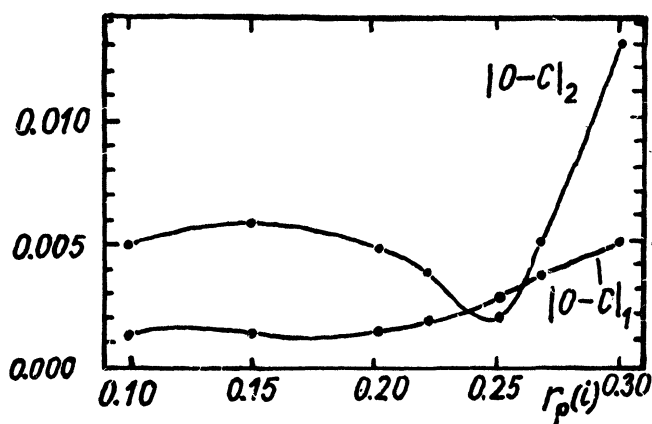


Рис. 3. Зависимость $|O-C|_1$ и $|O-C|_2$ от параметра $r_\rho(i)$. Минимум $|O-C|_2$ однозначно определяет решение задачи: $r_\rho, i, I_c(\xi), I_a^p(\xi)$; Значения $|O-C|_1$ и $|O-C|_2$, соответствующие решению задачи, меньше погрешности кривой блеска.

в пределах погрешностей). Очевидно, что погрешности элементов r_ρ, i определяются пересечением кривых $|O-C|_1$ и $|O-C|_2$ с прямой $|O-C| = \delta$.

О весах нормальных точек кривой блеска. Поскольку предлагаемый метод является прямым, достаточно рассмотреть лишь веса нормальных точек кривой блеска. Пусть кривая блеска в интенсивностях ректифицирована по формуле:

$$I_r = f(I_0, a, b, c), \quad (12)$$

где I_r — ректифицированный блеск системы, I_0 — наблюдаемый блеск системы, a, b, c — константы ректификации, определяемые способом наименьших квадратов из внезатменных участков кривой блеска, которые описываются законом:

$$I_{\text{зн.}} = a - b \cos \theta - c \cos^2 \theta.$$

Пусть $\epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_c$ — среднеквадратичные ошибки величин a, b, c . Дисперсия значения интенсивности, соответствующая нормальной точке ректифицированной кривой блеска, равна (Маделунг, 1961):

$$\epsilon_r^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial I_0} \right)^2 \epsilon_0^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial a} \right)^2 \epsilon_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b} \right)^2 \epsilon_b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c} \right)^2 \epsilon_c^2. \quad (13)$$

Здесь ϵ_0 — среднеквадратичная ошибка среднего значения интенсивности для данной нормальной точки. Если в последней усреднено n индивидуальных наблюдений, то, как известно (см., например, Шульберг, 1971),

$$\epsilon_0^2 = \frac{0.85 I_0^2 \epsilon_m^2}{n}, \quad (14)$$

где I_0 — интенсивность, соответствующая данной нормальной точке, ϵ_m — среднеквадратичная погрешность индивидуального наблюдения в звездных величинах.

Используя выражения (13), (14), можно для каждой нормальной точки вычислить среднеквадратичную ошибку ϵ_r . Вес каждой нормальной точки, как известно, обратно пропорционален квадрату среднеквадратичной ошибки:

$$W = \frac{K}{\epsilon_r^2}, \quad (15)$$

где K — произвольная константа.

Учет весов нормальных точек кривой блеска. Как и метод, описанный ранее (Черепашук, 1974, Черепашук и др., 1973), прямой вариант нового метода предполагает многократное решение интегральных уравнений (1), (2) при условии монотонности искомых функций $I_\alpha^p(\xi)$ и $I_\epsilon(\xi)$ и их ограниченности (см. неравенства (4), (5)), с той лишь разницей, что теперь верхняя ограничивающая константа для искомой функции $I_\alpha^p(\xi)$ не произвольна, а определяется через функцию $I_\epsilon(\xi)$, получаемую из интегрального уравнения (2), описывающего другой минимум кривой блеска. Поэтому в основу прямого варианта метода можно положить алгоритм и программы для ЭВМ, описанные ранее (Черепашук и др., 1973).

Предложенный ранее алгоритм решения интегральных уравнений (1), (2), состоит в минимизации расстояния $|O-C|$ между наблюдаемой и теоретической кривыми блеска

$$|O-C| = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} [(1-l)_H - (1-l)_T]^2 d\Delta \quad (16)$$

при условии монотонности и неотрицательности искомых функций $I_\epsilon(\xi)$ и $I_\alpha^p(\xi)$. Здесь $(1-l)_H$ — наблюдаемая потеря блеска, $(1-l)_T = \int_0^{\xi} K(\xi, \Delta) I(\xi) d\xi$ — теоретическая потеря блеска, $I(\xi) = I_\epsilon(\xi)$ или $I_\alpha^p(\xi)$ — искомая функция.

Определение расстояния $|O-C|$ между наблюдаемой и теоретической кривыми блеска с помощью формулы (16) (метрика пространства L_2)

В случае затменных переменных приводит к некоторым трудностям. Поскольку $\Delta = \sqrt{\cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \theta}$, то $d\Delta = \frac{\sin^2 i \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{\cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \theta}} d\theta$, и раз-

ным значениям параметра i соответствует разная метрика, что делает невозможным использование метрики (16) для выбора геометрических параметров задачи r_ρ, i . Метрику (16) можно использовать лишь для решения интегральных уравнений (1), (2) при фиксированных значениях параметров r_ρ, i ; выбор же последних следует проводить в метрике, не зависящей от самих параметров: либо по сумме квадратов отклонений теоретической кривой блеска от наблюдаемой, либо по максимальному отклонению (в программах П1 и П2, приведенных в работе Черепашук и др., (1973), выдаются поточечные разности между наблюдаемой и теоретической кривыми блеска, что дает возможность провести такой выбор параметров r_ρ, i). Именно так (по максимальному отклонению) проведен выбор параметров r_ρ, i в работе Черепашук (1972) и так следует использовать программы П1 и П2, приведенные в работе Черепашук и др. (1973). Отметим, что уже такой выбор параметров r_ρ, i дает неплохие результаты. Тем не менее, для устранения указанного несоответствия между процедурой решения интегральных уравнений и выбором искомой "геометрии", в настоящей работе рассмотрен алгоритм решения интегральных уравнений (1), (2) в классе монотонных неотрицательных функций в том случае, когда под расстоянием между теоретической и наблюдаемой кривыми блеска понимается весовая сумма квадратов отклонений теоретической кривой блеска от наблюдаемой (без домножения членов этой суммы на элементы $\delta \Delta = \Delta_{i+1} - \Delta_i$, зависящие от наклонности i и усложняющие процедуру выбора параметров r_ρ, i):

$$|O-C| = \sum_{i=1}^N [(1-i)_H - (1-i)_T]^2 \cdot W_i, \quad (17)$$

где j — номер нормальной точки кривой блеска, W_i — введенные выше веса (см. формулу (15)).

В новой метрике (17) все результаты прежних работ сохраняют свою силу (Черепашук и др., 1973, 1974) с той лишь разницей, что интегрирование по $x = \Delta$ во всех формулах следует заменить суммированием, а умножение на элементы $dx = d\Delta$ — умножением на веса W_i . Например, функционал (9) из работы Черепашук и др. (1973) в метрике (17) запишем в виде:

$$\Phi[z(s), u(x)] = \sum_{i=1}^N \left[\int_a^b K(x_i, s) z(s) ds - u(x_i) \right]^2 \cdot W_i,$$

градиент (10) функционала (9) (см. Черепашук и др., 1973) в новой метрике (17) имеет вид:

$$\begin{aligned}\Phi'_z[z(s), u(x)] &= \Phi'_z(s) = 2(A^+Az - A^+u) = \\ &= 2 \sum_{i=1}^N \left[\int_a^b K(x_i, s) K(x_i, \eta) z(\eta) d\eta \right] W_i - 2 \sum_{i=1}^N K(x_i, s) u(x_i) W_i.\end{aligned}$$

Здесь j — номер нормальной точки наблюдаемой кривой блеска. Совершенно аналогично видоизменяются и все остальные формулы, приведенные ранее (Черепашук и др., 1973, 1974).

В новой метрике (17) можно проводить как решение интегральных уравнений (1), (2), так и выбор "геометрии" системы — параметров r_ρ, i . Тем самым, проблема определения фотометрических элементов полуклассических затменных систем получает окончательное решение.

Программы на языке ФОРТРАН для решения интегральных уравнений (1), (2) в классе монотонных функций, ограниченных неравенствами (4), (5). В основу приводимых ниже программ П1 и П2 положены программы П1 и П2 из работы Черепашук и др. (1973). Программа П1 соответствует программе П1, программа П2 — программе П2. Программы П1 и П2 реализуют метод решения интегральных уравнений (1), (2), основанный на варианте Демьянова метода условного градиента, описанный ранее (Черепашук и др., 1973, 1974) с той лишь разницей, что теперь расстояние $|O-C|$ между наблюдаемой и теоретической кривыми блеска есть весовая сумма квадратов уклонений (см. формулу (17)). Кроме того, в новых программах П1 и П2 предусмотрен цикл по параметру i при фиксированном значении параметра r_ρ , что значительно облегчает прогон задачи по параметрам r_ρ, i . В остальном, программы П1 и П2 практически не отличаются от программ П1 и П2, приведенных ранее (Черепашук и др., 1973). Программы составлены на языке ФОРТРАН для ЭВМ БЭСМ-6 Вычислительного Центра Московского университета. В программы П1 и П2 добавлены следующие идентификаторы. А1К — массив значений углов наклона i , задается пользователем. АС2 — массив верхних ограничивающих констант, задается пользователем. В программе П2 значение верхней ограничивающей константы C_2 (см. неравенство (5)), как уже отмечалось, подбирается экспериментально (если C_2 не слишком мала, то она слабо влияет на результат решения). В программе П1 верхняя ограничивающая константа равна (см. неравенство (4)):

$$\frac{1 - L_w}{\pi r_\rho^2 \left(1 - \frac{x}{3}\right)}$$

и вычисляется при фиксированных r_p, i пользователем (в программе ПП светимость L_w , как и ранее, выдается на печать). Эта константа вычисляется пользователем после того, когда получена серия решений интегрального уравнения (2) с помощью программы ПП. V — вектор значений функции $\frac{1}{1_r^2}$, где 1_r — ректифицированный блеск системы. Если все точки кривой блеска равноточны (в звездных величинах) и погрешности констант ректификации пренебрежимо малы, то вектор V задает веса нормальных точек, VN — вектор значений функции $\frac{1_r^2}{\epsilon_r^2}$, где ϵ_r — среднеквадратичная ошибка интенсивности, соответствующая данной нормальной точке (см. формулу (13)). В случае, когда все точки равноточны в звездных величинах и константы ректификации абсолютно точны, $\epsilon_r^2 \sim 1_r^2$ и тогда вектор VN имеет одинаковые компоненты. В противном случае, вектор VN учитывает неравноточность нормальных точек ректифицированной кривой блеска; результат его умножения на вектор V дает веса $1/\epsilon_r^2$ нормальных точек, которые и используются при решении задачи (в программах ПП и ПП предусмотрено перемножение векторов V и VN). $K5$ — характеризует размерность цикла по параметру i , задается пользователем с помощью оператора присваивания (в данном конкретном варианте программ ПП и ПП предусмотрено решение интегральных уравнений (1), (2) при пяти значениях параметра i , т. е. $K5=5$). LM — число выполняемых итераций при поиске решения интегрального уравнения при фиксированных r_p, i , задается пользователем с помощью оператора присваивания. В нашем случае $LM=1000$, что, как показала практика, вполне достаточно для получения хорошего приближения. По выполнении 1000 итераций программа переходит к другому значению i , содержащемуся в массиве $A1K$, и повторяет вычисления. Если окажется, что $|O-C| < \delta$ по выполнении числа итераций, меньшего 1000, то программа также переходит к другому значению i (здесь δ — погрешность кривой блеска — идентификатор DELTA). В данном конкретном варианте программ ПП и ПП взято $\delta = 10^{-15}$, поэтому программы всегда выполняют при фиксированных r_p, i 1000 итераций. RS — радиус r_p для спутника — нормальной звезды, задается пользователем с помощью оператора присваивания. $TETA$ — угол $\theta_a(O)$ или $\theta_e(O)$, соответствующий началу затмения, задается пользователем и служит для вычисления параметров R_{ξ_a} и R_{ξ_e} , мажорирующих полные радиусы дисков поглощения и излучения r_{ξ_a} и r_{ξ_e} . RR — параметр R_{ξ_a} или R_{ξ_e} , вычисляется по формулам (6), (7). Цикл по параметру i начинается с оператора $D0_101_IM=1, K5$. Цикл поиска искомого приближения

к функции $I_c(\xi)$ или $I_a^p(\xi)$ начинается с оператора, имеющего метку 13. Перевод сетки по θ в сетку по Δ , вычисление матриц ядер $K_{1,2}(\xi, \Delta, r_p)$, выбор начальных приближений в программах П1 и П3 производится так же, как и в программах П1 и П2, приведенных ранее (Черепашук и др., 1973).

В программах П1 и П3 для данных r_p , i предусмотрены те же выдачи на печать, что и в программах П1 и П2, описанных ранее (Черепашук и др., 1973). Отличие состоит лишь в том, что дополнительно выдаются: вектор VN (идентификатор VESA), значение угла наклона орбиты в градусах и долях градусов (идентификатор INCLINATION), значение верхней ограничивающей константы (идентификатор C2), параметр R_{ξ_a} или R_{ξ_c} (идентификатор RR). Через каждые 20 итераций выдается $|O-C|$ — весовая сумма квадратов уклонений наблюдаемой кривой блеска от теоретической (идентификатор FZN). Искомое приближение выдается один раз по выполнении числа итераций, указанного идентификатором LM, или по критерию δ . После массива THEORETICAL CURV выдается сумма квадратов уклонений (не весовая) наблюдаемой кривой блеска от теоретической кривой (полученной с последним приближением к искомой функции).

Таким образом, исходными данными в программах П1 и П3 являются: значение $\theta_a(0)$ или $\theta_c(0)$, значение параметра r_p , массив наклонностей i ,

массив верхних ограничивающих констант, массив величин $\frac{1^2}{\epsilon_r^2}$, массив

углов θ_i (в градусах и долях градусов) и массив наблюдаемых потерь блеска $1 - 1_{1,2}(\theta_i)$. При пяти значениях параметра i программы П1 и П3 считают по 30 минут на ЭВМ БЭСМ-6 (10^6 операций в секунду).

Практический пример. Рассмотрим кратко пример решения описанным методом узкополосной кривой блеска системы V444 Cyg в континууме $\lambda 4244$. Детали этого решения и окончательные элементы орбиты системы V444 Cyg будут приведены в другой статье. При решении задачи мы будем следовать схеме, описанной ранее (Черепашук, 1974; Черепашук и др., 1973).

1. Необходимо доказать, что в исследуемой затменной системе выполняется условие $\cos i < r_p$. Для этого нужно снять несколько спектрограмм V444 Cyg в фазах вне затмений и по отношению эквивалентных ширин линий звезды O6 в спектре двойной системы V444 Cyg (WN5 + O6) к эквивалентным ширинам линий в спектре одиночной звезды того же спектрального класса грубо оценить отношение светимостей компонент L_w/L_o (из-за вклада континуума компоненты WN5 абсорбционные линии спутника O6 должны иметь меньшие эквивалентные ширины по сравнению с одиночной звездой класса O6). Подробно процедура оценки от-

отношения светимостей компонент в двойной системе подобным методом описана в работе Билса (1944). При такой оценке следует соблюдать осторожность, поскольку звезды-компоненты двойной системы могут обладать значительными избытками светимости для своего спектрального класса, в силу особенностей эволюции тесных двойных систем (см., например, Снежко, 1967; Мартынов, 1972). В случае системы V444 Cyg компонента Об, по-видимому, еще лежит на Главной последовательности, что позволяет провести корректную оценку отношения светимостей компонент и строго доказать с помощью достаточного критерия (Черепашук, 1973), что в этой системе условие $\cos i < r_p$ выполняется. Полученная таким способом оценка отношения светимостей компонент используется лишь для доказательства выполнимости условия $\cos i < r_p$, но не для решения задачи определения элементов. Точные значения светимостей компонент находятся совместно со всеми остальными элементами орбиты в результате решения задачи новым методом.

2. Решаем сначала вторичный минимум кривой блеска V444 Cyg, соответствующий случаю "спутник Об впереди звезды WN5". Задаем сетку значений параметров r_p, i . Например, для $r_p = 0.25$ берем значения $i = 90^\circ, 85^\circ, 80^\circ, 78^\circ, 74^\circ$, для $r_p = 0.30$ берем $i = 85^\circ, 80^\circ, 77^\circ, 74^\circ, 70^\circ$ и т.п. (см. рис. 1). Для каждого значения r_p формируем массив АИК. В формате, указанном в программе ПП, массив АИК для $r_p = 0.25$ запишется в виде:

__ 90.0 __ 85.0 __ 80.0 __ 78.0 __ 74.0 __ 00.0

и займет одну перфокарту.

Затем формируем массив АС2. Для вторичного минимума V444 Cyg константа C_2 (неравенство (5)) подбирается экспериментально и служит для устранения некорректности в точке $\xi = 0$. В нашем случае, как показала практика вычислений, можно положить $C_2 = 100$ для всех значений r_p, i . В формате, указанном в программе ПП, массив АС2 запишется так:

__ 100.0 __ 100.0 __ 100.0 __ 100.0 __ 100.0 __ 000.0

и также займет одну перфокарту. Далее, совершенно аналогичным образом формируем массивы углов θ_1 , потерь блеска $1 - I_2(\theta_1)$ и значений

$\frac{I_1^2}{\epsilon^2}$, служащих для вычисления весов нормальных точек кривой блеска

во вторичном минимуме. Все массивы записываются в форматах, указанных в программе ПП. Значение $\theta_c(0)$ (идентификатор ТЕТА) полагаем равным 35° (снимаем с кривой блеска), значение параметра r_p

(идентификатор RS) берем равным 0.25 (см. программу ПII). Все описанные массивы чисел располагаем в конце программы после перфокарты *EXECUTE в той последовательности, как это отражено в программе: сначала идет массив верхних ограничивающих констант AC2, затем массив углов θ_1 (идентификатор P), затем — массив наблюдаемых потерь

блеска $1 - 1_2(\theta_1)$ (идентификатор U), затем — массив величин $\frac{1_2^2}{\epsilon_r}$ (иден-

тификатор VN), определяющих веса нормальных точек, затем — массив наклонностей AIK. Кроме того, в операторе DIMENSION задаем размерности всех массивов, использованных в программе. В данной конкретной программе ПII используется 50 точек по переменной ξ , т. е. функция $I_c(\xi)$ ищется в виде таблицы из 50 чисел с равномерным шагом; кроме того, в программе ПII использовано 15 нормальных точек кривой блеска (сетка по угловой переменной θ неравномерная).

В таком виде программа ПII может быть запущена в любую ЭВМ, имеющую транслятор с языка ФОРТРАН (с учетом специфики ввода и обращения к стандартным программам). Программа ПII выдает в конце счета 5 решений интегрального уравнения (2) при $r_p = 0.25$ для пяти значений параметра i , указанных в массиве AIK. Описанная процедура повторяется для других значений параметра $r_p = 0.20, 0.30$ и т. д. На рис. 4 приведены функции $I_c(\xi)$ для различных i при $r_p = 0.25, 0.30$, полученные с помощью программы ПII. Там же приведены поточечные разности между наблюдаемой и теоретической кривыми блеска. Как видно из рис. 4, эти разности сильно зависят от значений параметров r_p, i (что и позволяет определить значения этих параметров). Соответствующие среднеквадратичные отклонения на единицу веса $|O-C|_2$ также достаточно сильно зависят от значений параметров r_p, i (см. рис. 1).

3. Решаем главный минимум кривой блеска V444 Cyg (атмосферное затмение), т. е. решаем интегральное уравнение (1) с помощью программы ПI. Все массивы чисел в программе ПI формируются совершенно аналогично случаю программы ПII, с той лишь разницей, что массив верхних ограничивающих констант AC2 теперь задается не путем экспериментального подбора, а вычисляется пользователем по формуле (10). Для $r_p = 0.25$, например, массив AC2 запишется так:

5.01 5.03 4.87 4.50 2.80 0.00

Значение $\theta_0(0)$ берем равным 50° . На рис. 5 приведены решения интегрального уравнения (1) (функции $I_0^p(\xi)$) при различных r_p, i , полученные с помощью программы ПI. Видно, что для $r_p = 0.25$ и $i < 78^\circ$ функция $I_0^p(\xi)$ искусственно "сжимается" сверху, что приводит к увеличению $|O-C|_1$ (см. также рис. 1).

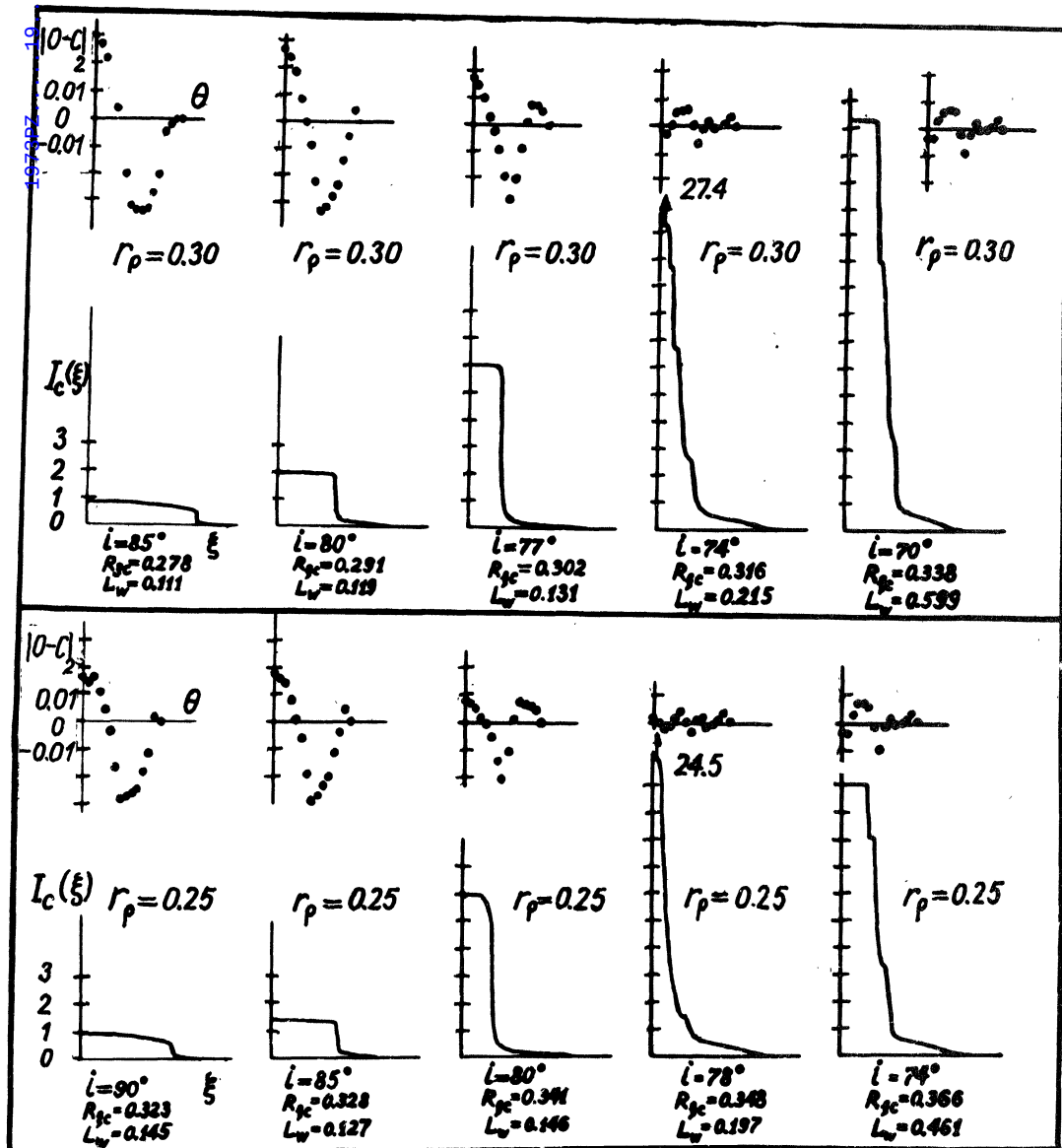


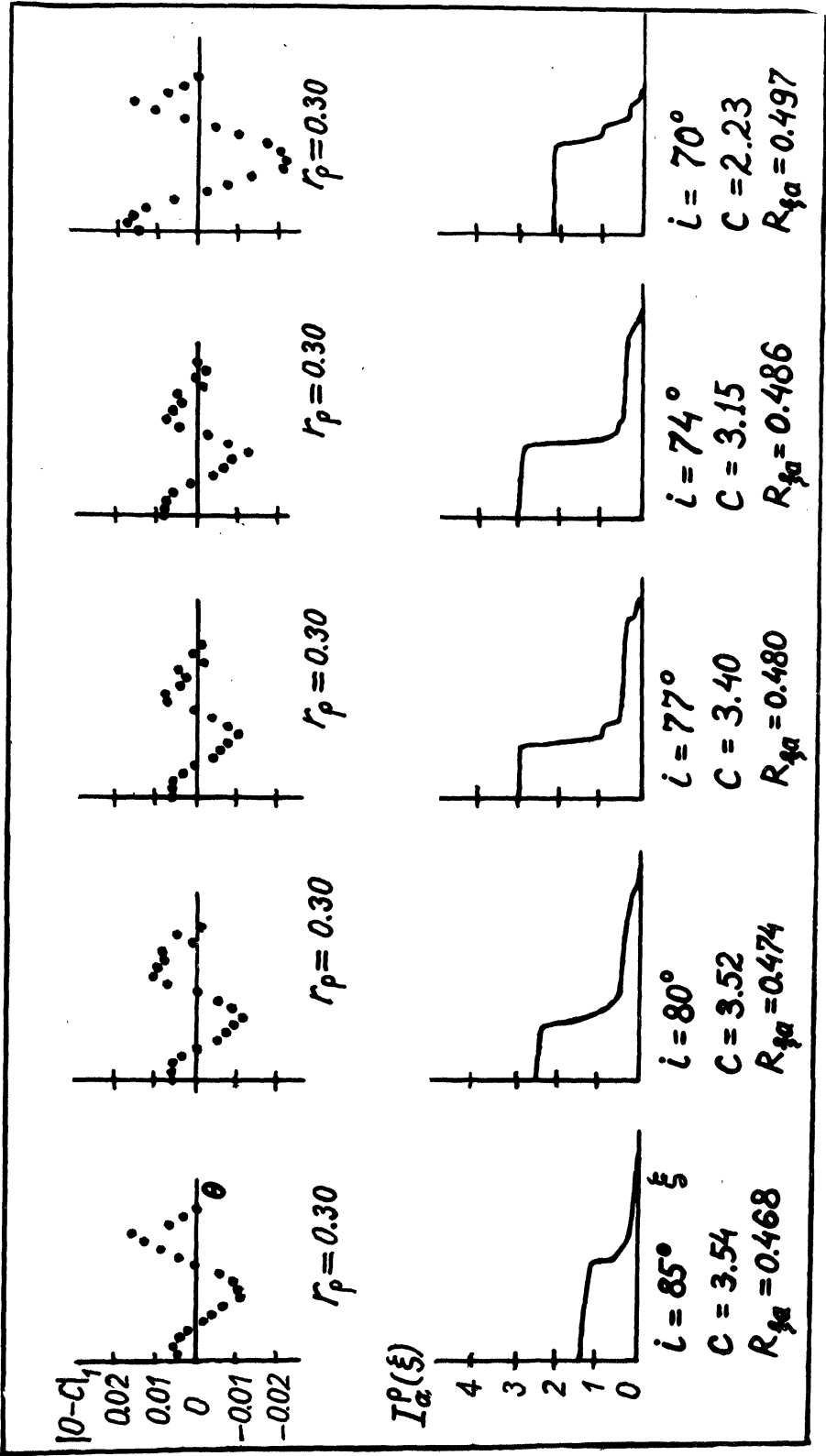
Рис. 4. Зависимость функций $I_c(\xi)$ от параметров r_p , i . Вверху приведены $|O-C|_2$ точечные отклонения теоретической кривой блеска от наблюдаемой, которые сильно зависят от параметров r_p , i . Это дает возможность однозначного определения решения.

4. Полученные зависимости $|O-C|_1$ и $|O-C|_2$ от параметров r_p , i в главном и вторичном минимумах кривой блеска совместно с уравнением (3) позволяют однозначно определить значения этих параметров, а, следовательно, и полное решение задачи (совокупность $I_c(\xi)$, $I_p(\xi)$, r_p , i), а также его погрешности. Процедура выбора искомых значений параметров r_p , i отражена выше, в части, посвященной постановке задачи, а также на рис. 1-3.

Сравнение с методами, описанными ранее. Новая методика решения кривых блеска полуклассических затменных систем (Черепашук, 1966, 1971) разрабатывалась на базе современных методов решения некорректно поставленных задач. Поэтому развитие новой методики было связано с прогрессом в методах решения некорректно поставленных задач, который стал особенно ощутим в последнее время благодаря ставшим классическими работам Тихонова (Тихонов, 1963а, б), а также работам школы Тихонова (Гласко и Заикин, 1966; Морозов, 1966, 1968; Гончарский и Ягола, 1969; Гончарский, Гушина, Леонов, Ягола, 1972).

К настоящему времени мы имеем три "версии" нового метода решения кривых блеска полуклассических затменных систем, различающиеся между собой во-первых тем, как "побеждается" некорректность, во-вторых, способом использования уравнения (3), связывающего оба минимума кривой блеска, и, в-третьих, выбором метрики, в которой решаются соответствующие интегральные уравнения.

Первая версия нового метода предложена в работе Черепашука, Гончарского и Яголы (1967). Здесь интегральные уравнения (1), (2) решались в классе функций, обладающих определенным порядком гладкости с помощью регуляризующего алгоритма, предложенного Тихоновым (1963а, б). При фиксированных значениях параметров r_ρ , i в качестве решений интегральных уравнений (1), (2) выбирались "наиболее гладкие" функции, удовлетворяющие этим уравнениям и обладающие минимумом "тонкой структуры". Интегральные уравнения (1), (2) решались в метрике пространства L_2 , неравноточность нормальных точек не учитывалась. При этом, для нахождения искоемых функций $I_\rho(\xi)$ и $I_\rho^0(\xi)$ использовались лишь "верхние" части минимумов кривой блеска, соответствующие $\Delta \geq r_\rho$. Участки кривой блеска, соответствующие $\Delta < r_\rho$ служили для выбора искоемых значений параметров r_ρ , i (по максимальному отклонению теоретической кривой блеска от наблюдаемой). Поскольку искомая функция $I_\rho^0(\xi)$ удовлетворяла требованию минимума тонкой структуры, значения этой функции в окрестности точки $\xi = 0$ определялись со сравнительно небольшими погрешностями, что позволяло использовать уравнение (3) не проводя усреднение функции $I_\rho^0(\xi)$ в пределах непрозрачного ядра. Радиус последнего при этом удовлетворительно определялся точкой выхода функции $I_\rho^0(\xi)$ на участок постоянного значения в окрестности точки $\xi = 0$. Поскольку искомая функция $I_\rho^0(\xi)$ выбиралась по принципу "наибольшей гладкости", ее значения в окрестности точки $\xi = 0$ получались минимальными в пределах коридора ошибок, обусловленного погрешностями наблюдений. В этом случае, при



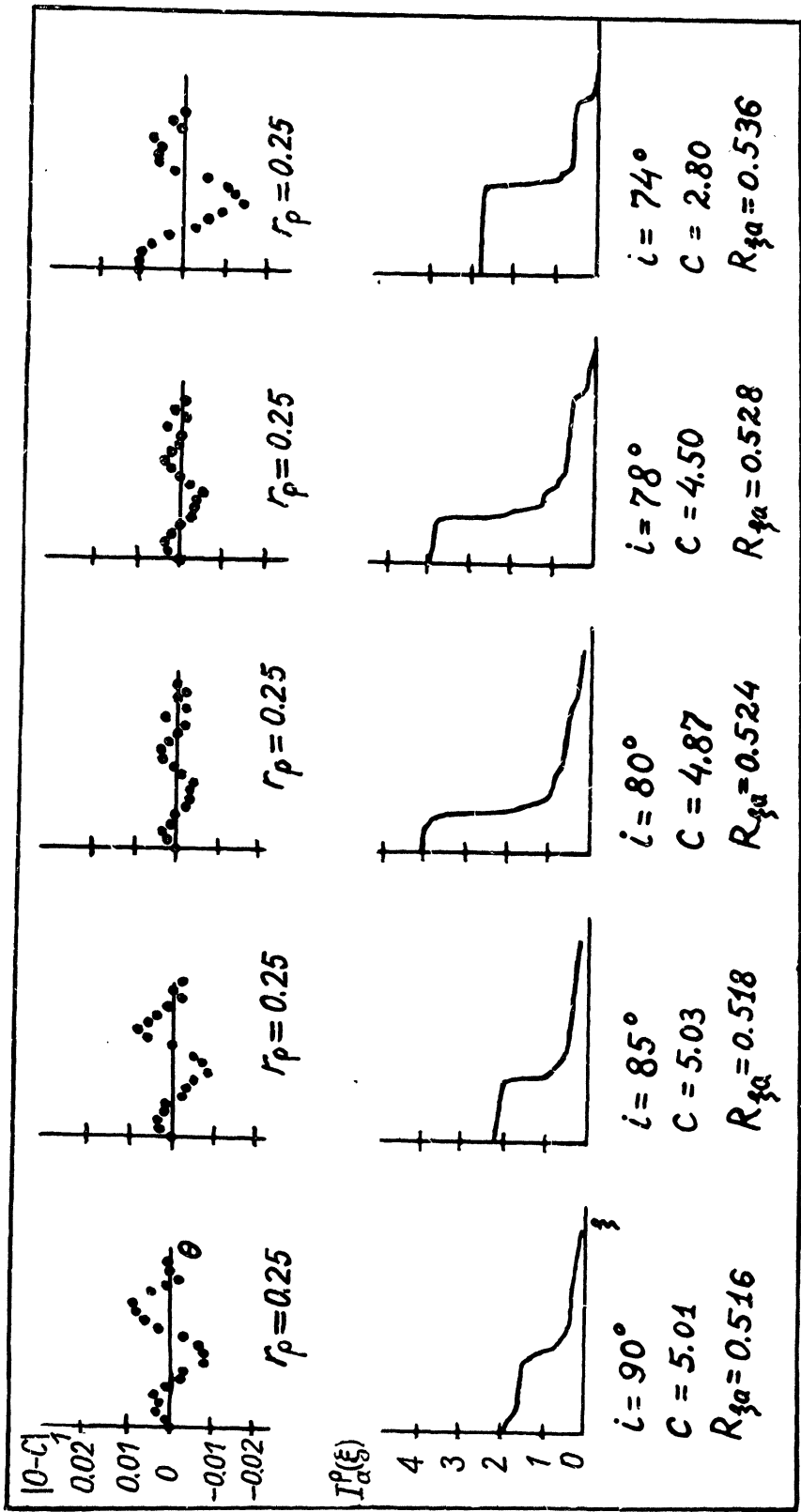
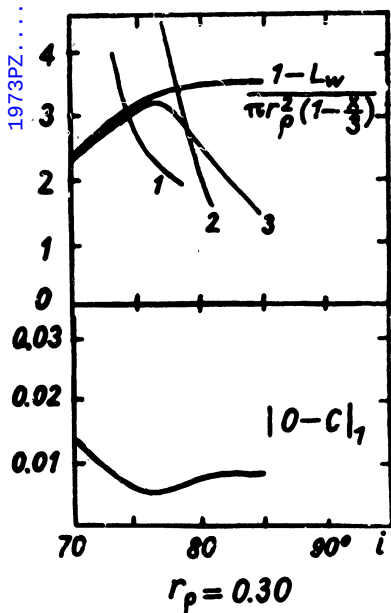


Рис. 5. Зависимость функций $I_a^p(\xi)$ от параметров r_p, i, C уменьшением i при данном r_p функция $I_a^p(\xi)$ все больше "сжимается" верхней ограничивающей константой (см. неравенство (4)), что приводит к возрастанию $|O-C|_1$ — поточечный уклонений теоретической кривой блеска от наблюдаемых, приведенных вверху рисунка.

Рис. 6.



Установление зависимости $r_p(i)$ при помощи уравнения (3) в разных версиях нового метода. Кривая 1 соответствует решению задачи в классе гладких функций (первая версия метода). Здесь значению $r_p = 0.30$ соответствует $i = 74^\circ$. Кривая 2 реализует вторую версию нового метода: решение ищется в классе монотонных неотрицательных функций, верхняя ограничивающая константа для функции $I_p^0(\xi)$ произвольна. Здесь значению $r_p = 0.30$ соответствует $i = 79^\circ$. Кривая 3 соответствует третьей версии метода, изложенной в настоящей статье: ограничивающая константа для функции $I_p^0(\xi)$ задается формулой (10). Здесь минимум $|O-C|_1$ и максимум кривой 3 позволяют значению $r_p = 0.30$ поставить в соответствие значение $i = 77^\circ$, которое является оптимальным.

использовании уравнения (3) каждому значению параметра r_p ставится в соответствие минимальное (допустимое ошибками наблюдений) значение угла наклона орбиты i (см. рис. 6).

Вторая версия нового метода предложена в работе Черепашука, Гончарского и Яголы (1973). Здесь использована специфика задачи интерпретации кривых блеска затменных систем, которая состоит в том, что искомые функции, описывающие распределение фотометрических характеристик по дискам звезд, с хорошим приближением можно априори считать монотонными и ограниченными (это качество искомых функций весьма слабо зависит от конкретной физической природы звезды и охватывает как звезды с тонкими, так и звезды с протяженными атмосферами). Решение интегральных уравнений (1), (2) ищется в классе монотонных ограниченных функций путем минимизации невязки $|O-C|$ (в метрике пространства L_2 , неравноточность наблюдений не учитывается). Используемый алгоритм решения интегральных уравнений основан на результатах работ Гончарского и Яголы (1969) и Гончарского и др. (1972). Кривая блеска не разбивается на части точкой $\Delta = r_p$, используются нормальные точки. Поскольку при поиске решения в классе монотонных функций остается некорректность в одной точке ($\xi = 0$), ее необходимо устранять выбором верхней ограничивающей константы для искомой функции. Эта некорректность в точке $\xi = 0$ приводит к необходимости усреднения значений функции $I_p^0(\xi)$ в пределах непрозрачного ядра при использовании уравнения (3), поскольку функция $I_p^0(\xi)$ в окрестности точки $\xi = 0$ определяется со значительной погрешностью и мо-

жет принимать в точке $\xi = 0$ весьма большие значения (т. к. это не противоречит условию невозрастания функции $I_0^p(\xi)$). При таком подходе, когда верхняя ограничивающая константа для функции $I_0^p(\xi)$ выбирается в значительной степени произвольно, использование уравнения (3) ставит в соответствие каждому значению параметра r_p наибольшее (допустимое ошибками наблюдений) значение параметра i (см. рис. 6).

Таким образом, первая и вторая версии нового метода решения кривой блеска полуклассической затменной системы соответствуют двум крайним случаям (в смысле использования уравнения (3)) и позволяют получить нижний и верхний пределы для параметра i при каждом значении параметра r_p . Очевидно, что с уменьшением погрешности кривой блеска обе версии нового метода должны давать все более и более близкие результаты. Следует отметить, что, поскольку выполнимость уравнения (3) в обоих описанных случаях не контролируется минимумом $|O-C|$, обе версии нового метода не позволяют провести уверенную оценку погрешностей решения (погрешности решения, приведенные в работах Черепашука и др., 1967; Черепашука, 1971, 1972, по-видимому, занижены).

Третья версия нового метода, описанная в настоящей статье, объединяет достоинства первой и второй версии и, по-видимому, является оптимальной. Тот факт, что верхняя ограничивающая константа для функции $I_0^p(\xi)$ задается не произвольно, а однозначно выражается через функции и параметры задачи, позволяет полностью устранить некорректность в точке $\xi = 0$ с одной стороны и контролировать выполнимость условия (3) минимумом $|O-C|_1$ — с другой, что дает возможность уверенной оценки погрешности решения. При таком подходе к решению задачи использование уравнения (3) совместно с минимумом $|O-C|_1$ ставит в соответствие каждому значению параметра r_p оптимальное значение угла наклона орбиты i . Учет неравноточности нормальных точек кривой блеска повышает надежность получаемого решения.

Автор искренне признателен А. В. Гончарскому и А. Г. Яголе за помощь в составлении программ ПІ и ПІІ и многочисленные консультации, а также Х. Ф. Халиуллина за помощь в проведении вычислений.

Литература:

- Билс, 1944 — *Beals C.S.*, MN 104, 205.
 Гласко В.Б., Заикин П.Н., 1966, сб. Вычислительные методы и программирование, изд-во МГУ, 5, 61.
 Гончарский А.В., Ягола А.Г., 1969, Докл. АН СССР 184, 771.

- 197302...19...227C
- Гончарский А.В., Гушина Л.Г., Леонов А.С., Ягола А.Г., 1972, Журн. Вычислит. матем. и матем. физ. 12, 283.
- Григар, 1965 -- Grygar J., Bull. Astr. Inst. Czech. 16, 195.
- Маделунг Э.М., 1961, Математический аппарат физики, изд. физ.-мат. лит-ры, М., стр. 402.
- Мартынов Д.Я., 1972, УФН, 108, 701.
- Морозов В.А., 1966, Докл. АН СССР, 167, 510.
- Морозов В.А., 1968, Журн. вычислит. матем. и матем. физ. 8, 895.
- Снежко Л.И., 1967, ПЗ 16, 253.
- Тихонов А.Н., 1963а, Докл. АН СССР, 151, 501.
- Тихонов А.Н., 1963б, Докл. АН СССР, 153, 49.
- Черепашук А.М., 1966, АЖ 43, 517.
- Черепашук А.М., 1971, В монографии "Затменные переменные звезды", "Наука", М., стр. 261-312, 36-44.
- Черепашук А.М., 1972, АЦ № 739.
- Черепашук А.М., 1973, АЖ 50, 879.
- Черепашук А.М., 1974, АЖ 51, в печати.
- Черепашук А.М., Гончарский А.В., Ягола А.Г., 1967, АЖ 44, 1239.
- Черепашук А.М., Гончарский А.В., Ягола А.Г., 1973, ПЗ 18, 535.
- Черепашук А.М., Гончарский А.В., Ягола А.Г., 1974, АЖ 51, в печати.
- Шульберг А.М., 1971, в монографии "Затменные переменные звезды", "Наука", М., стр. 81.

Москва,
Гос. астрономический ин-т
им. П.К.Штернберга

*Поступила в редакцию
в октябре 1973 г.*

Программа П II (случай "спутник—нормальная звезда впереди
компоненты с протяженной атмосферой")

```

PROGRAM MONO
DIMENSION A(15,50),
IX(15), S(50), Z(50), U(15),
2AZ(15), AZT(15), ZT(50),
3ATU(50), GR(50), P(15),
4DIF(20), AIK(20), AC2(20), V(20), VN(20)
PRINT 1
1 FORMAT(20H MONOTONOUS FUNCTION)

N=15
M=50
K5=5
LM=1000
PI=3.1415926538
RS=.25
DELTA=1.E-15
TETA=35.
TETA=TETA+PI/180.
C1=0.0
READ 100, (AC2(I), I=1, K5)
100 FORMAT(6F6.0)
READ 350, (P(I), I=1, M)
350 FORMAT(4F7.0)
PRINT 202, (P(I), I=1, M)
READ 353, (U(I), I=1, M)
353 FORMAT(4F6.0)
READ 353, (VN(I), I=1, M)
PRINT 710
710 FORMAT(5H VESA)
PRINT 202, (VN(I), I=1, M)
READ 100, (AIK(I), I=1, K5)
DO 150 I=1, M
P(I)=P(I)*PI/180.
150 CONTINUE
DO 101 IM=1, K5
C2=AC2(IM)
AI=AIK(IM)
PRINT 104
104 FORMAT(12H INCLINATION)
PRINT 70 AI
PRINT 151
151 FORMAT(3H C2)
PRINT 70 C2
AI=AI*PI/180.
DO 351 I=1, M
X(I)=SQRT(COS(AI)**2+
1(SIN(AI)*SIN(P(I)))**2)
351 CONTINUE
PRINT 352
352 FORMAT(7H SIETKA)
PRINT 202, (X(I), I=1, M)
202 FORMAT(6(E20.9))
RR=SQRT(COS(AI)**2+
1(SIN(AI)*SIN(TETA)**2)-RS
PRINT 105
105 FORMAT(3H RR)
PRINT 70 RR
R1=M
R2=RR/(R1-1.)
S(I)=0.
DO 52 I=2, M
S(I)=S(I-1)+R2
52 CONTINUE
DO 700 I=1, M
V(I)=1./(1.-U(I))**2
V(I)=V(I)*VN(I)
700 CONTINUE

DO 65 J=1, M
DO 65 I=1, N

R1=RS*X(I)
IF(S(J)-R1) 81,80,80
80 A(I,J)=0.
GO TO 65
81 R1=R1
IF(1.E-09-S(J)) 53,54,54
54 A(I,J)=0.0
GO TO 65
53 R1=RS-X(I)
IF(S(J)-R1) 55,55,56
55 A(I,J)=2.*PI*S(J)
GO TO 65

56 IF(S(J)+R1) 57,57,58
57 A(I,J)=0.0
GO TO 65
58 R1=(S(J)**2+X(I)**2-RS**2)/(2.*X(I)
1*S(J))

R2=1.-R1**2
IF(R2) 59,59,60
59 R2=0.0
60 R3=SQRT(R2)
IF(R1-1.E-11) 61,62,62
62 A(I,J)=2.*S(J)*ATAN(R3/R1)
GO TO 65
61 IF(R1+1.E-11) 63,63,64
63 A(I,J)=2.*S(J)*(PI-ATAN(-R3/R1))
GO TO 65
64 A(I,J)=PI*S(J)
65 CONTINUE
K=M-1
Z(M)=-1.
DO 204 I=1, K
204 Z(I)=SQRT(1.-(S(I)/R1)**2)
1-1.
DO 205 I=1, N
R1=0.
R2=0.
DO 206 J=1, K
R1=R1+.5*(A(I,J)*Z(J)+
1A(I,J+1)*Z(J+1))*(S(J+1)-S(J))
206 R2=R2+.5*(A(I,J)+A(I,J+1))*
1(S(J+1)-S(J))
AZ(I)=R1
205 AZT(I)=R2
K=M
R5=0.
R1=0.
R2=0.
R3=0.
R4=0.
DO 207 I=1, K
R1=R1+V(I)*AZT(I)**2
R2=R2+V(I)*AZ(I)*AZT(I)
R3=R3+V(I)*AZT(I)*U(I)
R4=R4+V(I)*AZ(I)**2
R5=R5+V(I)*AZ(I)*U(I)
207 CONTINUE
AJ=(R3*R4-R5*R2)/(R1*
1R4-R2*R2)
AB=(R1*R5-R2*R3)/(R1*
1R4-R2*R2)
PRINT 45, AJ, AB
45 FORMAT(2(E20.9))
K=M-1
Z(M)=AJ-AB
DO 210 I=1, K
210 Z(I)=AJ+AB*(SQRT(1.-(S(I)
1/RR)**2)-1.)
DO 501 I=1, M
IF(Z(I)) 502,502,501
502 Z(I)=0.
501 CONTINUE
PRINT 67
67 FORMAT(22H INITIAL APPROXIMATION)
PRINT 202, (Z(I), I=1, M)
PRINT 44
44 FORMAT(18H EXPERIMENTAL CURV)
PRINT 202, (U(I), I=1, M)
K=M
DO 9 J=1, M
R1=0.0
DO 8 I=1, K
R2=V(I)*A(I,J)*U(I)
7 R1=R1+R2
8 CONTINUE
ATU(J)=R1
9 CONTINUE
K=M-1
DO 11 I=1, M
R1=0.0
DO 10 J=1, K
R2=.5*(A(I,J)*Z(J)+A(I,J+1)*Z(J+1))+
1(S(J+1)-S(J))
R1=R1+R2
10 CONTINUE
AZ(I)=R1
11 CONTINUE
R1=0.0
K=M
DO 12 I=1, K
R2=V(I)*(AZ(I)-U(I))**2
12 R1=R1+R2
FZO=R1
PRINT 69

```

```

69 FORMAT(4H FZ1)
PRINT 70 FZ0
70 FORMAT(E20.9)
PRINT 68
68 FORMAT(14H INITIAL CURVE)
PRINT 202, (AZ(I), I=1, N)
DO 400 I=1, N
400 DIF(I)=U(I)-AZ(I)
PRINT 72
PRINT 202, (DIF(I), I=1, N)
IN=0
IN1=0
13 K=N
DO 15 J=1, M
R1=0.0
DO 14 I=1, K
R2=V(I)*A(I, J)*AZ(I)
R1=R1+R2
14 CONTINUE
GR(J)=R1-ATU(J)
15 CONTINUE
DO 16 I=1, M
ZT(I)=C1
NS=0
NSM=0
K=M-1
R1=0.0
DO 17 I=1, K
R2=.5*(GR(I)*ZT(I)+GR(I+1)*ZT(I+1))*
1(S(I+1)-S(I))
17 R1=R1+R2
ALM=R1
DO 20 J=1, M
NS=NS+1
ZT(J)=C2
R1=0.0
DO 18 I=1, K
R2=.5*(GR(I)*ZT(I)+GR(I+1)*ZT(I+1))*
1(S(I+1)-S(I))
R1=R1+R2
18 CONTINUE
IF(R1-ALM) 19, 20, 20
19 ALM=R1
NSM=NS
20 CONTINUE
DO 21 I=1, M
ZT(I)=C1
IF(NSM) 24, 24, 22
22 DO 23 I=1, NSM
23 ZT(I)=C2
24 DO 26 I=1, N
R1=0.0
DO 25 J=1, K
R2=.5*(A(I, J)*ZT(J)+A(I, J+1)*ZT(J+1))*
1(S(J+1)-S(J))
R1=R1+R2
25 CONTINUE
AZT(I)=R1
26 CONTINUE
K=M
R1=0.0
DO 27 I=1, K
R2=V(I)*(AZT(I)-AZ(I))*2
R1=R1+R2
27 CONTINUE
AC=R1
R1=0.0
DO 28 I=1, K
R2=V(I)*(AZT(I)-AZ(I))*(AZ(I)-U(I))
R1=R1+R2
28 CONTINUE
BC=2.*R1
ALPHA=-BC/(1.*AC)
IF(1.-ALPHA) 29, 29, 30
29 ALPHA=1.

GO TO 32
30 IF(ALPHA) 38, 38, 31
31 FZN=FZ0-(BC**2)/(4.*AC)
GO TO 33
32 FZN=AC+BC+FZ0
33 DO 34 I=1, M
34 Z(I)=(1.-ALPHA)*Z(I)+ALPHA*ZT(I)
K=M-1
DO 36 I=1, N
R1=0.0
DO 35 J=1, K
R2=.5*(A(I, J)*Z(J)+A(I, J+1)*Z(J+1))*
1(S(J+1)-S(J))
R1=R1+R2
35 CONTINUE
AZ(I)=R1
36 CONTINUE
IF(DELTA-FZN) 37, 38, 38
37 FZ0=FZN
IN=IN+1
IN1=IN1+1
IF(20-IN) 46, 46, 13

46 IN=0
PRINT 103
103 FORMAT(4H FZN)
PRINT 70 FZN
IF(LM-IN1) 102, 102, 13
102 R1=R1
PRINT 39 ALPHA, DELTA, FZN, FZ0
PRINT 47
47 FORMAT(14H APPROXIMATION)
PRINT 202, (Z(I), I=1, M)
PRINT 42
PRINT 202, (AZ(I), I=1, N)
DO 71 I=1, M
71 DIF(I)=U(I)-AZ(I)
SUM=0.
DO 160 I=1, N
160 SUM=SUM+DIF(I)**2
PRINT 78 SUM
PRINT 72
72 FORMAT(11H DIFFERENCE)
PRINT 202, (DIF(I), I=1, N)
K=M-1
SVET=0.
DO 600 I=1, K
600 SVET=SVET+(Z(I)*S(I)+Z(I+1)*
1S(I+1))/2.*(S(I+1)-S(I))
SVET=2*PI*SVET
PRINT 601
601 FORMAT(11H SVETIMOST)
PRINT 602 SVET
602 FORMAT(E20.9)
GO TO 101
38 PRINT 39 ALPHA, DELTA, FZN, FZ0
39 FORMAT(4(E20.9))
PRINT 40
40 FORMAT(9H SOLUTION)
PRINT 202, (Z(I), I=1, M)
PRINT 42
42 FORMAT(17H THEORETICAL CURV)
PRINT 202, (AZ(I), I=1, N)
101 CONTINUE
STOP
END

```

Программа П I (атмосферное затмение)

```

PROGRAM MONO
DIMENSION A(20,50),
1X(20), S(50), Z(50), U(20),
2AZ(20), AZY(20), ZY(50),
3ATU(50), GR(50), P(20),
4DIF(20), AIK(20), AC2(20), V(20), VN(20)
PRINT 1
1 FORMAT(20H MONOTONOUS FUNCTION)
N=20
M=50
K5=5
LM=1000
PI=3.1415926538
RS=.25
DELTA=1.E-15
TETA=50.
TETA=TETA*PI/180.
C1=0.0
READ 100,(AC2(I),I=1,K5)
100 FORMAT(6F6,0)
READ 350,(P(I),I=1,M)
350 FORMAT(4F7,0)
PRINT 202,(P(I),I=1,M)
READ 353,(U(I),I=1,M)
353 FORMAT(4F6,0)
READ 353,(VN(I),I=1,M)
PRINT 710
710 FORMAT(5H VESA)
PRINT 202,(VN(I),I=1,M)
READ 100,(AIK(I),I=1,K5)
DO 150 I=1,M
P(I)=P(I)*PI/180.
150 CONTINUE
DO 101 I=1,K5
C2=AC2(I*M)
AI=AIK(I*M)
PRINT 104
104 FORMAT(12H INCLINATION)
PRINT 70 AI
PRINT 151
151 FORMAT(3H C2)
PRINT 70 C2
AI=AI*PI/180.
DO 351 I=1,M
X(I)=SQRT(COS(AI)**2+
1(SIN(AI)*SIN(P(I))**2)
351 CONTINUE
PRINT 352
352 FORMAT(7H SIETNA)
PRINT 202,(X(I),I=1,M)
202 FORMAT(6(E20,9))
AR=SQRT(COS(AI)**2+
1(SIN(AI)*SIN(TETA)**2)-RS
PRINT 105
105 FORMAT(3H RR)
PRINT 70 RR
R1=RM
R2=RR/(R1-1.)
S(I)=0.
DO 52 I=2,M
S(I)=S(I-1)+R2
52 CONTINUE
DO 700 I=1,M
V(I)=1./(1.-U(I))**2
V(I)=V(I)*VN(I)
700 CONTINUE
AX=.3
DO 65 J=1,M
DO 65 I=1,M
IF(1.E-09-X(I)) 300,300,80
300 R1=RS+X(I)
IF(S(J)-R1) 81,80,80
80 A(I,J)=0.
GO TO 65
81 IF(1.E-09-S(J)) 53,80,80
53 R1=RS-X(I)
IF(S(J)-R1) 55,55,56
55 R2=SQRT(4.*S(J)*X(I)/(RS**2-
1(S(J)-X(I))**2)
R3=ELLICE(R2)
A(I,J)=2.*PI*(1.-AX)*S(J)
1+(4.*S(J)/RS)*AX*SQRT(RS**2-
1(S(J)-X(I))**2)*R3
GO TO 65
56 IF(S(J)+R1) 80,80,56
58 R1=(S(J)**2+X(I)**2-R3**2)/
1(2.*X(I)*S(J))
R2=1.-R1**2
IF(R2) 59,59,60
59 R2=0.
60 R3=SQRT(R2)
R2=SQRT((RS**2-(S(J)-X(I))**2)/
1(4.*S(J)*X(I)))
R4=ELLICE(R2)
R5=ELLICE(R2)
R2=8.*S(J)*AX*SQRT(S(J)*X(I))*
1R4/RS+AX*RS*(2.*SQRT(S(J))*
2RS**2-2.*SQRT(S(J))*S(J)+
3X(I))*R2/(RS*SQRT(X(I)))
IF(R1-1.E-11) 61,62,62
62 A(I,J)=2.*S(J)*ATAN(R3/R1)*
1(1.-AX)+R2
GO TO 65
61 IF(R1+1.E-11) 63,63,64
63 A(I,J)=2.*S(J)*(PI-ATAN(-R3/
1R1))*(1.-AX)+R2
GO TO 65
64 A(I,J)=PI*S(J)*(1.-AX)+R2
65 CONTINUE
DO 204 I=1,M
204 Z(I)=C2*(1.-S(I)/RR)
PRINT 67
67 FORMAT(22H INITIAL APPROXIMATION)
PRINT 202,(Z(I),I=1,M)
PRINT 44
44 FORMAT(15H EXPERIMENTAL CURV)
PRINT 202,(U(I),I=1,M)
K=M
DO 9 J=1:M
R1=0.0
DO 8 I=1,K
R2=V(I)*A(I,J)*U(I)
7 R1=R1+R2
8 CONTINUE
ATU(J)=R1
9 CONTINUE
K=M-1
DO 11 I=1,M
R1=0.0
DO 10 J=1,K
R2=.5*(A(I,J)*Z(J)+A(I,J+1)*Z(J+1))+
1(S(J+1)-S(J))
R1=R1+R2
10 CONTINUE
AZ(I)=R1
11 CONTINUE
R1=0.0
K=M
DO 12 I=1,K
R2=V(I)*(AZ(I)-U(I))**2
12 R1=R1+R2
FZO=R1
PRINT 69
69 FORMAT(4H FZI)
PRINT 70 FZO
70 FORMAT(E20,9)
PRINT 68
68 FORMAT(14H INITIAL CURVE)
PRINT 202,(AZ(I),I=1,M)
DO 400 I=1,M
400 DIF(I)=U(I)-AZ(I)
PRINT 72
PRINT 202,(DIF(I),I=1,M)
IN=0
IN1=0
13 K=M
DO 15 J=1,M
R1=0.0
DO 14 I=1,K
R2=V(I)*A(I,J)*AZ(I)
R1=R1+R2
14 CONTINUE
OR(J)=R1-ATU(J)
15 CONTINUE
DO 16 I=1,M
16 ZT(I)=C1
NS=0
NSM=0
K=M-1
R1=0.0
DO 17 I=1,K
R2=.5*(OR(I)*ZT(I)+OR(I+1)*ZT(I+1))+
1(S(I+1)-S(I))
17 R1=R1+R2
ALN=R1
DO 20 J=1,M
NS=NS+1

```

```

19.227C
ZT(J)=C2
R1=0.0
DO 18 I=1,K
R2=.5*(6R(I)*ZT(I)+6R(I+1)*ZT(I+1))*
1(S(I+1)-S(I))
R1=R1+R2
18 CONTINUE
IF(R1-ALM) 19,20,20
19 ALM=R1
NSM=NS
20 CONTINUE
DO 21 I=1,M
21 ZT(I)=C1
IF(NSM) 24,24,22
22 DO 23 I=1,NSM
23 ZT(I)=C2
24 DO 26 I=1,M
R1=0.0
DO 25 J=1,K
R2=.5*(A(I,J)*ZT(J)+A(I,J+1)*ZT(J+1))*
1(S(J+1)-S(J))
R1=R1+R2
25 CONTINUE
AZT(I)=R1
26 CONTINUE
K=M
R1=0.0
DO 27 I=1,K
R2=V(I)*(AZT(I)-AZ(I))*2
R1=R1+R2
27 CONTINUE
AC=R1
R1=0.0
DO 28 I=1,K
R2=V(I)*(AZT(I)-AZ(I))*(AZ(I)-U(I))
R1=R1+R2
28 CONTINUE
BC=2.*R1
ALPHA=-BC/(2.*AC)
IF(1.-ALPHA) 29,29,30
29 ALPHA=1.
GO TO 32
30 IF(ALPHA) 38,38,31
31 FZN=FZO-(BC**2)/(4.*AC)
GO TO 33
32 FZN=AC+BC+FZO
33 DO 34 I=1,M
34 Z(I)=(1.-ALPHA)*Z(I)+ALPHA*ZT(I)

K=M-1
DO 36 I=1,N
R1=0.0
DO 35 J=1,K
R2=.5*(A(I,J)*Z(J)+A(I,J+1)*Z(J+1))*
1(S(J+1)-S(J))
R1=R1+R2
35 CONTINUE
AZ(I)=R1
36 CONTINUE
IF(DELTA-FZN) 37,38,38
37 FZO=FZN
IN=IN+1
IN1=IN+1
IF(20-IN) 46,46,13
46 IN=0
PRINT 103
103 FORMAT(4H FZN)
PRINT 70 FZN
IF(LN-IN1) 102,102,13
102 R1=R1
PRINT 39 ALPHA,DELTA,FZN,FZO
PRINT 47
47 FORMAT(14H APPROXIMATION)
PRINT 202,(Z(I),I=1,M)
PRINT 42
PRINT 202,(AZ(I),I=1,N)
DO 71 I=1,M
71 DIF(I)=U(I)-AZ(I)
SUM=0.
DO 160 I=1,N
160 SUM=SUM+DIF(I)**2
PRINT 70 SUM
PRINT 72
72 FORMAT(11H DIFFERENCE)
PRINT 202,(DIF(I),I=1,M)
GO TO 101
38 PRINT 39 ALPHA,DELTA,FZN,FZO
39 FORMAT(4(E20.9))
PRINT 40
40 FORMAT(9H SOLUTION)
PRINT 202,(Z(I),I=1,M)
PRINT 42
42 FORMAT(17H THEORETICAL CURV)
PRINT 202,(AZ(I),I=1,N)
101 CONTINUE
STOP
END

```